

Lista Especial de Exercícios de Física Matemática I - Soluções
(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira e Inicial)
IFUSP - 7 de Março 2016

Exercício 1 *O movimento de uma corda elástica de comprimento π com extremidades fixas é regido pela equação*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (1)$$

onde (a parte real de) $u = u(t, x)$ é o deslocamento instantâneo de um ponto x da corda com respeito a posição de repouso e v é a velocidade de propagação da onda, sujeita a condição de fronteira: $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$, $t > 0$ e inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (2)$$

(A parte real de)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{ivnt} \sin nx \quad (3)$$

é a solução do problema.

Para verificar que (3) satisfaz a equação (1), derivamos formalmente (3), isto é, termo a termo, duas vezes com respeito a t e x .¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2}u_{tt}(t, x) &= \frac{1}{v^2}(iv)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{ivnt} \sin nx \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{ivnt} \sin nx = u_{xx}. \quad \square \end{aligned}$$

Quanto às condições de fronteiras, para cada n e $t > 0$, $b_n e^{ivnt} \sin nx$ se anula nos extremos do intervalo: $x = 0$ e $x = \pi$ e a solução, dada pela soma destes termos, se anula formalmente nestes pontos. Tomando $t = 0$ em (3), obtemos (2).

Escrevendo

$$b_n = d_n - i f_n$$

onde, para cada n , $d_n = \Re(b_n)$ é a parte real de b_n e $f_n = -\Im(b_n)$ é menos a parte imaginária de b_n , juntamente com a fórmula de Euler

$$e^{ivnt} = \cos vnt + i \sin vnt,$$

a parte real de (3) pode ser escrita como

$$\Re(u(t, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos vnt + f_n \sin vnt) \sin nx.$$

¹Aqui e nas demais passagens, não retire variáveis que estão sendo somadas para fora da soma! Por exemplo, após derivar a exponencial duas vezes em t , o fator $(iv)^2$ pode ser retirado, ao passo que n^2 deve permanecer dentro do somatório.

A velocidade instantânea em $t > 0$ no ponto $x \in [0, \pi]$ da corda é dada por

$$u_t(t, x) = iv \sum_{n=1}^{\infty} n b_n e^{ivnt} \sin nx .$$

No instante $t = 0$, a (parte real da) velocidade no ponto x da corda é

$$\begin{aligned} \Re(u_t(0, x)) &= v \sum_{n=1}^{\infty} n \Re(ib_n) \sin nx \\ &= v \sum_{n=1}^{\infty} n f_n \sin nx . \end{aligned}$$

Se os b_n 's forem reais então $f_n = 0$ para todo n e a (parte real da) velocidade inicial é, formalmente, 0.

Exercício 2 A propagação do calor em termos da temperatura $u = u(t, x)$ de uma barra condutora de comprimento π , com extremidades isoladas e condutividade térmica $\kappa = 1$, é regida pela equação

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (4)$$

sujeita às condições de fronteira: $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$, $t > 0$ (fluxo nulo através das fronteiras) e inicial

$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx . \quad (5)$$

Verifiquemos que

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx \quad (6)$$

satisfaz, formalmente, a equações (4). Diferenciando (6) termo a termo com respeito a t e duas vezes com respeito a x , concluímos:

$$u_t(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-n^2 t} \cos nx = u_{xx}(t, x) . \quad \square$$

Quanto as condições de fronteiras, diferenciando (6) com respeito a x ,

$$u_x(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

substituindo em seguida, para cada n , $x = 0$ e $x = \pi$, esta quantidade se anula termo a termo e, formalmente, é igual a 0. Para a condição inicial (5), basta tomar $t = 0$ em cada termo de (6), verificando a igualdade termo a termo.

Exercício 3 A temperatura $u = u(r, \theta)$ de equilíbrio em um metal no formato de um disco de raio unitário: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e condutividade $\kappa = 1$ é regida pelas equações

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

e

$$u(1, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} . \quad (7)$$

Para verificar que

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \quad (8)$$

satisfaz estas equações, diferenciamos (8) termo a termo:

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n r^{|n|-1} e^{in\theta}$$

$$u_{rr} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| (|n| - 1) c_n r^{|n|-2} e^{in\theta}$$

$$u_{\theta\theta} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

de onde se conclui que, formalmente,

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n| (|n| - 1) + |n|) c_n r^{|n|-2} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 c_n r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} . \quad \square \end{aligned}$$

Claramente, tomando $r = 1$ em cada termo da soma em (8), obtemos formalmente (7).

Exercício 4 O potencial eletrostático $\phi = \phi(x, y)$ em uma região retangular é dado pela solução da equação de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

com

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \\ \phi(x, 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx . \end{aligned} \quad (9)$$

Vamos verificar que

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} + B_k \frac{\sinh ky}{\sinh k} \right) \sin kx \quad (10)$$

é a solução formal do problema. Para isso, basta diferenciar duas vezes (10), termo a termo, com respeito a x e y :

$$\phi_{xx} = - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(A_k \frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} + B_k \frac{\sinh ky}{\sinh k} \right) \sin kx = -\phi_{yy} . \quad \square$$

Tomando $y = 0$ e $y = 1$ para cada termo em (10) obtemos, formalmente, as séries de Fourier ímpar e par, resp., em (9)