

Lista Especial de Exercícios de Física Matemática I

(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira e Inicial)

IFUSP - Fevereiro 2016

Exercício 1 Considere as seguintes equações diferenciais parciais para o movimento, dinâmica ou estática de um sistema físico e cuja solução (formal)¹ é dada por uma séries trigonométrica de Fourier.

1. O movimento de uma corda elástica de comprimento π com extremidades fixas é regido pela equação

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (1)$$

onde $u = u(t, x)$ é o deslocamento instantâneo de um ponto x da corda com respeito a posição de repouso e v é a velocidade de propagação da onda, sujeita a condição de fronteira: $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$, $t > 0$ e inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (2)$$

(A parte real de)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{ivnt} \sin nx \quad (3)$$

é a solução do problema. Verifique que (3) satisfaz as equações (1), (2) e de fronteira. Qual é a velocidade $u_t(t, x)$ em cada instante t em cada ponto x da corda? Qual é a (parte real da) velocidade da corda no instante inicial?

2. A propagação do calor medida pelo intermédio da temperatura $u = u(t, x)$ de uma barra condutora de comprimento π , com extremidades isoladas e condutividade $\kappa = 1$, é regida pela equação

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (4)$$

sujeita às condições de fronteira: $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$, $t > 0$ (fluxo nulo através das fronteiras) e inicial

$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (5)$$

Verifique que

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

satisfaz as equações (4), (5) e a condição de fronteira.

3. A temperatura $u = u(r, \theta)$ de equilíbrio em um metal no formato de um disco de raio unitário: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e condutividade $\kappa = 1$ é regida pelas equações

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

e

$$u(1, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Verifique que

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

satisfaz estas equações.

4. O potencial eletrostático $\phi = \phi(x, y)$ em uma região retangular é dado pela solução da equação de equação de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

com

$$\phi(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$$

$$\phi(x, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx.$$

Verifique que

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} + B_k \frac{\sinh ky}{\sinh k} \right) \sin kx.$$

¹Isto é, sem rigor matemático com respeito a convergência ou manipulação das séries em questão.