

Primeira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira)

IFUSP - 17 Março 2015

Exercício 1 *Os autovalores e autofunções correspondentes dos seguintes problemas de valor de fronteira $X'' + \lambda^2 X = 0$, com **1.** $X(0) = X'(L) = 0$; **2.** $X(-\pi) = X(\pi)$ e $X'(-\pi) = X'(\pi)$; **3.** $X(0) = 0$ e $X'(1) + hX(1) = 0$; são:*

1. *As funções $\cos \lambda x$ e $\sin \lambda x$ são duas soluções linearmente independentes (L.I.) da equação*

$$X'' + \lambda^2 X = 0 . \quad (1)$$

A solução geral de (1) em $(0, L)$ é, portanto, a combinação linear destas:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (2)$$

Substituindo em (2) os valores de fronteira nos pontos extremos do intervalo:

$$X(0) = A = 0$$

$$X'(L) = \lambda \cos \lambda L = 0$$

resulta os seguintes valores próprios (valores de λ para os quais a segunda equação é satisfeita e cuja solução não é identicamente nula): $\lambda_n = (n - 1/2) \pi / L$, $n = 1, 2, \dots$ (semi-inteiros múltiplos de π / L), e correspondentes autofunções

$$X_n(x) = \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x .$$

2. *A solução geral (2) de (1) em $(-\pi, \pi)$ sujeita a*

$$X(\pi) - X(-\pi) = 2B \sin \lambda \pi = 0$$

$$X'(\pi) - X'(-\pi) = -2\lambda A \sin \lambda \pi = 0$$

resulta no seguinte conjunto de valores próprios e autofunções correspondentes: para $\lambda = 0$ temos $X_0 = 1$ e para cada $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, temos duas autofunções L.I. correspondentes: quando tomamos $B = 0$ na primeira equação e $\lambda = n$ na segunda,

$$X_n^{(\text{par})}(x) = \cos nx ;$$

e, quando tomamos $A = 0$ na segunda equação e $\lambda = n$ na primeira,

$$X_n^{(\text{impar})}(x) = \sin nx .$$

Dizemos, neste caso, que os autovalores λ_n tem multiplicidade (algébrica) 2 e possuem um auto-espaço de dimensão 2. Logo, qualquer combinação linear $X_n = aX_n^{(\text{par})}(x) + bX_n^{(\text{impar})}(x)$ é também uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_n = n$.

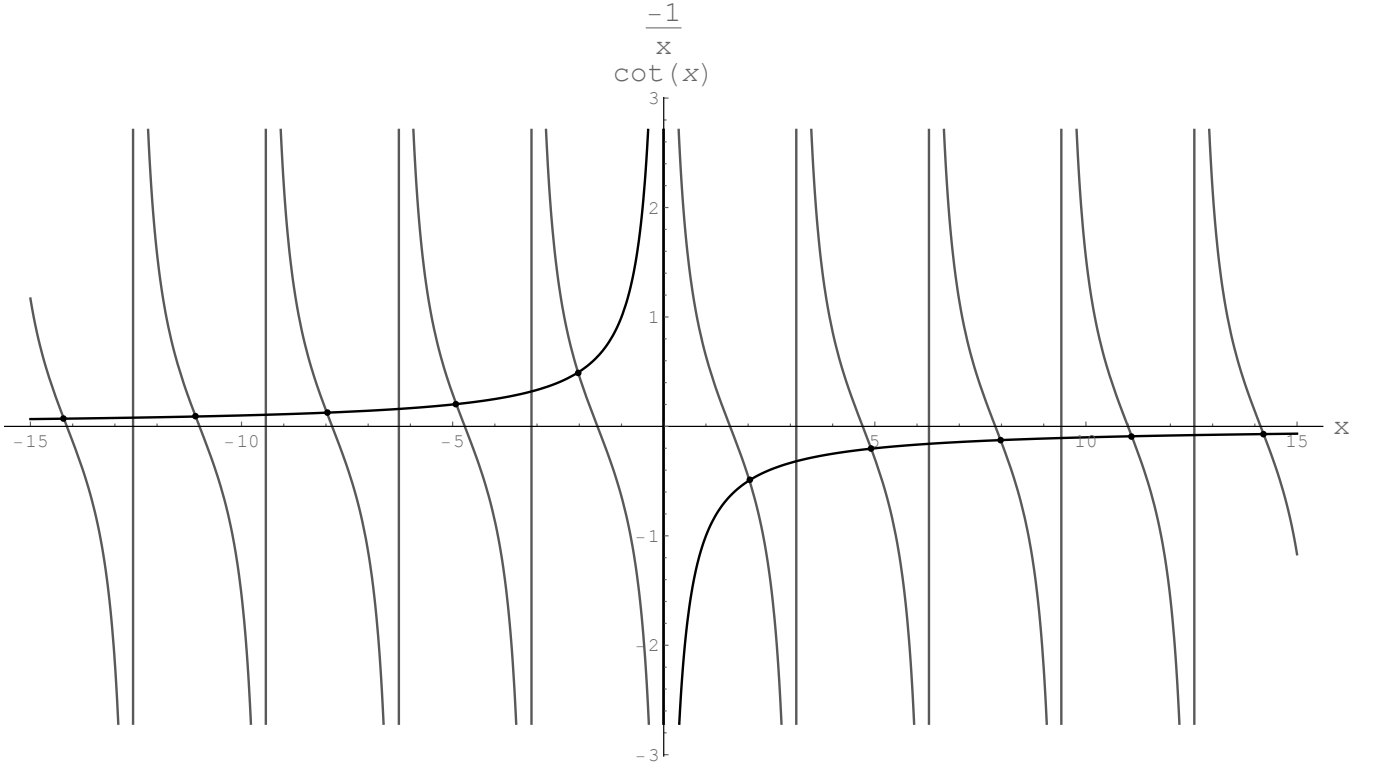


Figure 1: As coordenadas dos pontos de inteseção das curvas $\cot \lambda$ e $-1/\lambda$, são os autovalores do problema de fronteira do ítem 3 com $h = 1$

3. A solução geral (2) de (1) em $(0, 1)$ satisfazendo

$$X(0) = A = 0$$

$$X'(1) + hX(1) = B(\lambda \cos \lambda + h \sin \lambda) = 0$$

resulta em uma equação transcendental para os autovalores

$$\cot \lambda = -\frac{h}{\lambda}$$

cuja solução gráfica (veja Figura 1) é dada pela intersecção das curvas (diversos ramos da função) $\cot \lambda$ e as hipérboles $-h/\lambda$ ($h = 1$ na figura). Se λ_n , $n = 1, 2, \dots$, enumera os autovalores positivos em ordem crescente:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots ,$$

temos (numéricamente) $\lambda_1 = 2.0287578$, $\lambda_2 = 4.9131804$, $\lambda_3 = 7.9786657$, $\lambda_4 = 11.0855384$, $\lambda_5 = 14.2074367$ e $\lambda_n \sim (n - 1/2)\pi$ assintoticamente quando n tende a ∞ . A n -ésima autofunções correspondentes a λ_n é

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x.$$

Exercício 2 Considere a equação do calor

$$u_t - u_{xx} = 0$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$ sujeita às condições

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

com

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

1. Vimos na lista especial de exercícios, item 2, que as funções $u_0(t, x) = 1$ e $u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos nx$, $n = 1, 2, \dots$, satisfazem

$$(u_0)_t = (u_0)_{xx} = 0, \quad \text{em } R$$

e $(u_0)_x(t, x) \equiv 0$ garante as condições nas fronteiras $x = 0$ e $x = \pi$; para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n)_{xx} = -n^2 u_n = (u_n)_t, \quad \text{em } R,$$

e

$$(u_n)_x(t, 0) = 0$$

$$(u_n)_x(t, \pi) = -n e^{-n^2 t} \sin n\pi = 0,$$

identicamente para $t \geq 0$.

2. Método de Fourier (de separação de variáveis): consiste em procurar soluções das equações homogêneas $u_t - u_{xx} = 0$ e $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ na forma produto

$$u(t, x) = T(t) X(x). \quad (3)$$

Substituindo na equação do calor, obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \sigma = -\lambda^2$$

com λ real, e a equação à derivadas parciais (juntamente com as condições de fronteira) é reduzida a um par de equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (4)$$

com $X'(0) = X'(\pi) = 0$ e

$$T' + \lambda^2 T = 0. \quad (5)$$

Resolvemos primeiramente o problema de autovalores: encontrar todas as soluções da equação (4) sujeita as condições nas duas extremidades do intervalo $(0, \pi)$. A solução geral de (4)

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

juntamente com

$$X'(0) = \lambda B = 0$$

$$X'(\pi) = \lambda A \sin \lambda \pi = 0$$

determinam os pares de autovalores/autofunções do problema:¹ para $\lambda = 0$ temos $X_0(x) = 1$ e para $\lambda = n \in \mathbb{N}$ temos $X_n(x) = \cos nx$. A solução geral da equação (5) é

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$$

e o produto (3) reproduz, tomando a constante $C = 1$, a coleção de soluções das equações homogêneas sugerida no item 1:

$$u_0(t, x) = 1$$

$$u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Para resolução das equações em $\bar{R} = \{(t, x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi\}$, incluindo a condição não homogênea em $t = 0$, procedemos da seguinte maneira. Por linearidade das operações diferenciais e item 2, a combinação linear

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx,$$

satisfaz, sem se preocupar com questões sobre a convergência da série e supondo legítima a derivação termo a termo, a equação do calor

$$u_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n e^{-n^2 t} \cos nx = u_t,$$

em R e condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = u_x(0, \pi) = 0, \quad t > 0.$$

Em particular, $u(t, x)$ satisfaz em $t = 0$,

$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = f(x).$$

¹Como as equações são homogêneas, as autofunções são determinadas a menos de uma constante multiplicativa, a qual fixamos, por simplicidade, igual a 1.