

Primeira Lista de Exercícios de Física Matemática I
(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira)
IFUSP - Fevereiro 2016

Exercício 1 *Encontre os autovalores e as autofunções correspondentes dos seguintes problemas de valor de fronteira:*

1. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = X'(L) = 0$;
2. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(-\pi) = X(\pi)$ e $X'(-\pi) = X'(\pi)$;
3. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = 0$ e $X'(1) + hX(1) = 0$.

Indicação. Represente graficamente a solução da equação transcendental satisfeita pelos autovalores do item 3.

Exercício 2 *A temperatura $u = u(t, x)$ de uma barra condutora isolada de comprimento $L = \pi$ e difusibilidade $\kappa = 1$ satisfaz a equação do calor*

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$, juntamente com as condições inicial

$$u(0, x) = f(x) \tag{2}$$

para $0 \leq x \leq \pi$ e de fronteira

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \tag{3}$$

para $t > 0$. Supondo que o perfil de temperatura na barra em $t = 0$ seja dado por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

sabemos do Exercício 1.2 da lista especial (derivando termo-a-termo a série sem se preocupar com sua convergência) que

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

satisfaz as equações (1), (2) e (3). Resolva o problema de valores inicial e de fronteira, dado pelas equações (1), (2) com $f(x)$ dado pela série trigonométrica acima e (3), utilizando o método de Fourier.