

Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Série de Fourier)

IFUSP - 27 Março 2016

Exercício 1 (i) O período fundamental de $f(x) = |\sin x|$ é o menor $T > 0$ tal que a relação

$$|\sin(x + T)| = |\sin x|$$

é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$. Desenvolvendo o lado esquerdo,

$$|\sin x \cos T + \cos x \sin T| = |\sin x|$$

concluimos que a igualdade se dá se, e somente se,

$$\sin T = 0$$

$$|\cos T| = 1$$

cujas soluções são múltiplos de π . Logo $T = \pi$.

(ii) Sendo $f(x) = |\sin x|$ uma função π -periódica, a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$, lembrando que $2L = \pi$ e $n\pi/L = 2n$, é dada por

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2inx} \quad (1)$$

onde

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| e^{-2inx} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x e^{-2inx} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Neste ponto acrescento as seguintes observações. Primeiramente, $|\sin x|$ é uma função integrável por Riemann e, sendo positiva, absolutamente integrável. Os coeficientes de Fourier c_n 's estão, conseqüentemente, perfeitamente definidos. Na fórmula dos c_n 's, equação (2), o intervalo de definição foi deslocado de $\pi/2$ por conveniência, de $[-\pi/2, \pi/2]$ para $[0, \pi]$. Finalmente, $|\sin x| = \sin x$ em $[0, \pi]$.

Usando a fórmula de Euler para expressar $\sin x$ como $(e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x e^{-2inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} (e^{-i(2n-1)x} - e^{-i(2n+1)x}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{-i(2n-1)x}}{-i(2n-1)} - \frac{e^{-i(2n+1)x}}{-i(2n+1)} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1 - e^{-i(2n-1)\pi}}{i(2n-1)} - \frac{1 - e^{-i(2n+1)\pi}}{i(2n+1)} \right) \\ &= \frac{-2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1} \end{aligned} \quad (3)$$

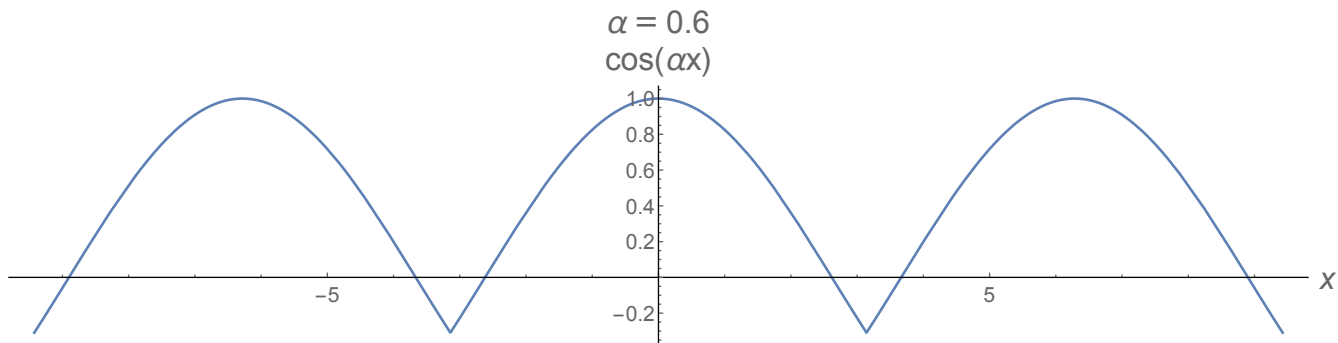


Figure 1: Gráfico da função $\cos(\alpha x)$ com $\alpha = 0.6$.

onde na última linha usamos $e^{\pm i\pi} = -1$ e $e^{-2\pi in} = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Substituindo (3) em (1), separando os coeficientes com índices positivos dos negativos,

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} (e^{2inx} + e^{-2inx}) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx . \end{aligned}$$

(iv) Note que os coeficientes $a_n = -(4/\pi)(4n^2 - 1)^{-1}$ da série de Fourier de $f(x) = |\sin x|$ em cossenos com $n \geq 1$ são todos de mesmo sinal negativo. Note que se $f(x)$ fosse convexa em $(0, \pi)$ estes coeficientes seriam todos positivos (veja Proposição 1.1 dos Complementos em <http://www.fig.if.usp.br/~marchett/fismat1>, Notas de Aula). Ocorre que $|\sin x|$ é uma função côncava em $(0, \pi)$ e $-|\sin x|$ é convexa neste mesmo intervalo. Logo, a função $-|\sin x|$ tem todos coeficientes $(4/\pi)(4n^2 - 1)^{-1}$ com $n \geq 1$ positivos, compatível com o resultado geral sobre as funções convexas no intervalo $(0, 2L)$ de um período fundamental $2L = \pi$.

Exercício 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica tal que

$$f(x) = \cos \alpha x , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (4)$$

no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. (i) A série de Fourier

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (5)$$

de $f(x)$ é uma série trigonométrica cujo n -ésimo coeficiente, n um inteiro qualquer,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx , \quad (6)$$

está bem definido. Para isso, qualquer que seja α , note que $\cos \alpha x$ é integrável e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$.

Substituindo

$$f(x) = \cos \alpha x = \frac{1}{2} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})$$

na integral (6) com $n \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\alpha+n)x} dx \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{i(\alpha-n)} (e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}) + \frac{1}{-i(\alpha+n)} (e^{-i(\alpha+n)\pi} - e^{i(\alpha+n)\pi}) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\alpha-n)} \sin(\alpha-n)\pi + \frac{1}{(\alpha+n)} \sin(\alpha+n)\pi \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\alpha-n)} + \frac{1}{(\alpha+n)} \right) \sin \alpha\pi \cos n\pi \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \sin \alpha\pi \cos n\pi \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \sin \alpha\pi .
\end{aligned}$$

onde na quinta igualdade usamos

$$\sin(\alpha \pm n)\pi = \sin \alpha\pi \cos n\pi \pm \cos \alpha\pi \sin n\pi = \sin \alpha\pi \cos n\pi .$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x dx \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} \sin \alpha\pi .
\end{aligned}$$

Substituindo os c_n 's em (5), separando os termos da soma com $n = 0$, $n > 0$ e $n < 0$, a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$ pode ser escrita como uma série trigonométrica real

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} \sin \alpha\pi + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \cos nx .
\end{aligned} \tag{7}$$

Note que, devido a $f(x)$ ser par, os coeficientes c_n tem a mesma paridade: $c_{-n} = c_n$ (veja Complemento 1 em <http://www.fig.if.usp.br/~marchett/fismat1>, Notas de Aula).

(ii) Podemos concluir da periodicidade e paridade de $f(x)$ que a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$ é uma função 2π -periódica e par. Com base neste fato, evidente pela expansão (7), vamos mostrar

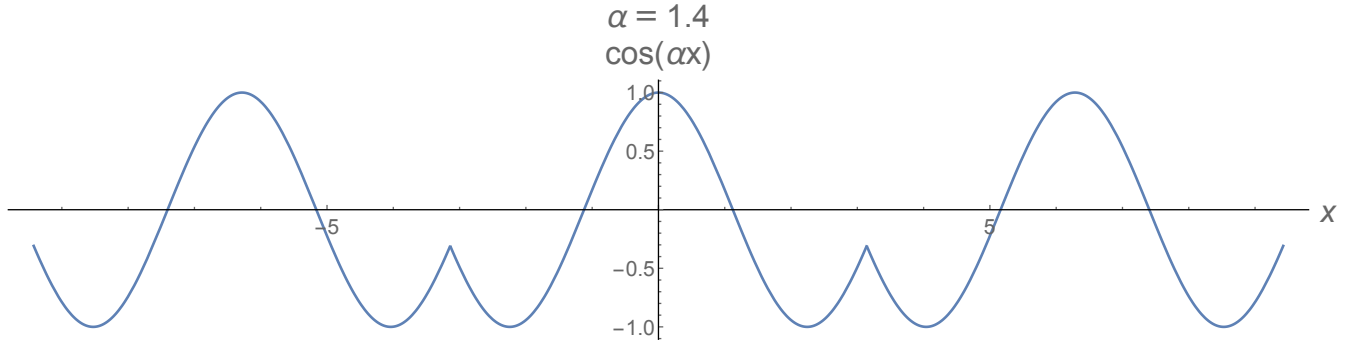


Figure 2: Gráfico da função $\cos(\alpha x)$ com $\alpha = 1.4$.

(por contradição) que nos pontos extremos $\pm\pi$ do intervalo $[-\pi, \pi]$, $Sf(x)$ é contínua. Suponhamos que $Sf(x)$ seja descontínua em $x = \pi$, isto é, $Sf(\pi+0) \neq Sf(\pi-0)$. Então, pela periodicidade de $Sf(x)$, $Sf(\pi+0) = Sf(-\pi+0)$ e, pela hipótese de descontinuidade, $Sf(-\pi+0) \neq Sf(\pi-0)$, em contradição com sua paridade: $Sf(-x) = Sf(x)$ em $x = \pi-0$. $f(x)$ é contínua em $x \in [-\pi, \pi]$ pela continuidade da função $\cos \alpha x$ no intervalo $(-\pi, \pi)$ e pela paridade.

(iii) A $f(x)$ é, além disso, seccionalmente diferenciável. Para isso, note que $f'(x)$ é uma função 2π -periódica tal que $f'(x) = -\alpha \sin \alpha x$ em $(-\pi, \pi)$ e os limites à direita e à esquerda nos pontos extremos $\pm\pi$ existem para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. A convergência de $Sf(x)$ para $f(x)$ em $\mathbb{R}$ é, portanto, garantida pelo Teorema de Fourier e continuidade de $f(x)$ nos pontos $\pm\pi$. Tomando $x = \pi$ na igualdade $f(x) = Sf(x)$, temos

$$\cos \alpha \pi = \frac{1}{\pi \alpha} \sin \alpha \pi + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$$

onde usamos $\cos^2 n\pi = (-1)^{2n} = 1$. Para $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\sin \alpha \pi \neq 0$ e podemos dividir a igualdade por esta quantidade concluindo

$$\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi \alpha} - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

Fazendo $\alpha = 1/2$ na última igualdade, temos $\cot \pi/2 = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = 0$ e

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (1/2)^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

de onde se conclui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$