

Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a derivadas parciais não-homogêneas e séries de Fourier)

IFUSP - 23 Abril 2016

Exercício 1 *Uma fonte externa fornece calor a uma taxa*

$$g(t, x) = (\pi/2 - |\pi/2 - x|) e^{-t}$$

ao longo de uma barra condutora de extensão π , cuja temperatura inicial é $x(\pi - x)/2$ e em cujas faces: $x = 0$ e $x = \pi$, a temperatura é mantida igual a zero. O problema de valores inicial e de fronteira (PVI) correspondente a esta situação é

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = g(t, x) , \quad (1)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$ com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 , \quad t > 0 \quad (2)$$

e

$$u(0, x) = \frac{x}{2} (\pi - x) , \quad 0 \leq x \leq \pi . \quad (3)$$

O método da variação dos parâmetros consiste em procurar uma solução do PVI na forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx . \quad (4)$$

Sabemos que, pelo método de Fourier, u dado por (4) onde $c_n(t) = b_n \exp(-n^2 \kappa t)$, é solução do PVI (1) com $(\pi/2 - |\pi/2 - x|) e^{-t}$ substituído por 0, (2) e (3) com

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx , \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

o n -ésimo coeficientes de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, ímpar tal que $f(x) = x(\pi - x)/2$ para $x \in [0, \pi]$. A função f é contínua e sua derivada f' é quadrado integrável de forma que sua série de Fourier $Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ converge uniformemente para f no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Substituindo (4) em (1), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa} \dot{c}_n(t) + n^2 c_n(t) \right) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin nx \quad (6)$$

onde os g_n 's são coeficientes de Fourier da função $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica na variável x , ímpar tal que $g(t, x) = (\pi/2 - |\pi/2 - x|) e^{-t}$ para $t > 0$ e $x \in (0, \pi)$. Escrevendo

$$g_n(t) = e^{-t} \bar{g}_n ,$$

temos

$$\begin{aligned}
\bar{g}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi/2 - |\pi/2 - x|) \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} (1 - \cos nx) \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx \\
&= \frac{-2}{\pi n} (1 - \cos nx) \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos nx) \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} .
\end{aligned}$$

Na passagem da segunda para a terceira igualdade fizemos na segunda integral a mudança de variável $y = \pi - x$ a qual, devido a

$$\sin nx = \sin(n\pi - ny) = -\cos n\pi \sin ny ,$$

reduz os limites de integração e o integrando, exceto pelo fator $-\cos n\pi$, aos mesmos da primeira integral; observamos na quarta igualdade que os termos de fronteira ao integrar por partes dão contribuição nula. O limite inferior é obviamente zero enquanto que o superior se anula em vista de $(1 - \cos nx) \cos(n\pi/2) = 0$ para n um inteiro par ou ímpar. Note na última igualdade que os termos com n par se anulam.

Como $\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ formam um conjunto *L. I.* de funções definidas no intervalo $(0, \pi)$, a igualdade (6) se dá termo-a-termo:

$$\frac{1}{\kappa} \dot{c}_n(t) + n^2 c_n(t) = e^{-t} \bar{g}_n , \quad t > 0$$

com $c_n(0) = b_n$, devido a (4) e (5). Esta equação pode ser integrada e sua solução é

$$\begin{aligned}
c_n(t) &= c_n(0) e^{-n^2 \kappa t} + \kappa \bar{g}_n \int_0^t e^{-n^2 \kappa(t-s)} e^{-s} \, ds \\
&= b_n e^{-n^2 \kappa t} + \kappa \bar{g}_n e^{-n^2 \kappa t} \int_0^t e^{(n^2 \kappa - 1)s} \, ds \\
&= b_n e^{-n^2 \kappa t} + \frac{\kappa \bar{g}_n}{n^2 \kappa - 1} \left(e^{-t} - e^{-n^2 \kappa t} \right) .
\end{aligned} \tag{7}$$

Para escrever a solução do PVIF (1), (2) e (3), resta ainda calcular os coeficientes b_n 's dados por

(5):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{-2}{\pi n} \left(\frac{x}{2} (\pi - x) \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi n^2} \left((\pi - 2x) \sin nx \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi n^3} (1 - \cos n\pi)
\end{aligned} \tag{8}$$

A solução do PVIF é, por substituição de (7) e (8) em (4),

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^3} \left(e^{-n^2 \kappa t} + \sin \frac{n\pi}{2} \frac{n\kappa}{n^2 \kappa - 1} \left(e^{-t} - e^{-n^2 \kappa t} \right) \right) \sin nx . \tag{9}$$

Devido as funções $f(x)$ e $g(t, x)$ serem contínuas nas extremidades $x = 0$ e $x = \pi$ e suas derivadas f' e g_x quadrado integráveis, a convergência da série de Fourier da segunda derivada de u com respeito à x e primeira com respeito a t são uniformes em $[0, \pi]$ e $t > 0$. Consequentemente, a troca de ordem das derivadas com o somatório é garantida e a série (9) é de fato uma solução do PVIF no sentido estrito (para condições suficientes veja Teorema 4.3 do texto “Análise de Fourier e EDPs” de Djairo G. de Figueiredo).

Exercício 2 Considere o seguinte PVIF

$$u_t - u_{xx} + hu = 0, \quad h > 0, \tag{10}$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) = 1, \quad t > 0 \tag{11}$$

e condição inicial

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x < \pi \tag{12}$$

O primeiro passo para resolução do PVFI é transformá-lo em outro PVIF com a condição de contorno homogênea. Escrevemos

$$u(t, x) = v(x) + w(t, x) \tag{13}$$

onde $v(x)$ é a solução independente do tempo das equações (10) e (11):

$$\begin{aligned}
-v'' + hv &= 0, & 0 < x < \pi \\
v(0) &= 0 \\
v(\pi) &= 1
\end{aligned} \tag{14}$$

cuja solução, impondo as condições de fronteira à solução geral,

$$v(x) = A \cosh \sqrt{h}x + B \sinh \sqrt{h}x$$

$$v(0) = A = 0$$

$$v(\pi) = B \sinh \sqrt{h}\pi = 1$$

é

$$v(x) = \frac{\sinh \sqrt{h}x}{\sinh \sqrt{h}\pi} . \quad (15)$$

Substituindo (13), (14) e (15) em (10), (11) e (12), resulta da linearidade das equações o seguinte PVIF para w

$$w_t - w_{xx} + hw = 0 , \quad (16)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$w(t, 0) = w(t, \pi) = 0 , \quad t > 0 \quad (17)$$

e condição inicial

$$w(0, x) = -\frac{\sinh \sqrt{h}x}{\sinh \sqrt{h}\pi} , \quad 0 \leq x < \pi . \quad (18)$$

Note para equação (16)

$$u_t - u_{xx} + hu = -v'' + hv + w_t - w_{xx} + hw = w_t - w_{xx} + hw = 0$$

e as demais equações seguem analogamente.

O PVIF (16), (17) e (18) pode ser resolvido pelo método de Fourier. Substituindo

$$w(t, x) = T(t)X(x)$$

em (16) e (17), resulta em um par de equações ordinárias

$$T' + (\lambda^2 + h)\kappa T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 , \quad X(0) = X(\pi) = 0 .$$

A segunda equação e condição de fronteira é um problema de autovalores, já resolvido anteriormente:

$$\lambda_n = n$$

$$X_n(x) = \sin nx , \quad n \in \mathbb{N}$$

são os autovalores e autofunções correspondentes. A primeira equação tem solução $T(t)$ proporcional a $\exp(-(\lambda^2 + h)t)$. Portanto, a solução do PVIF para w é uma combinação linear

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n^2 + h)t} \sin nx \quad (19)$$

onde os b_n são os coeficientes de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica ímpar tal que $f(x) = -\sinh \sqrt{h}x / \sinh \sqrt{h}\pi$ em $(0, \pi)$:

$$b_n = \frac{-2}{\pi \sinh \sqrt{h}\pi} \int_0^\pi \sinh \sqrt{h}x \sin nx \, dx .$$

Pela fórmula de Euler, escrevemos o integrando como

$$\sinh \sqrt{h}x \sin nx = \frac{1}{2i} \left(-\cos \left(n + i\sqrt{h} \right) x + \cos \left(n - i\sqrt{h} \right) x \right) ,$$

cujas integral resulta

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{i\pi \sinh \sqrt{h}\pi} \int_0^\pi \left(\cos \left(n + i\sqrt{h} \right) x - \cos \left(n - i\sqrt{h} \right) x \right) dx \\ &= \frac{1}{i\pi \sinh \sqrt{h}\pi} \left(\frac{1}{n + i\sqrt{h}} \sin \left(n + i\sqrt{h} \right) \pi - \frac{1}{n - i\sqrt{h}} \sin \left(n - i\sqrt{h} \right) \pi \right) \\ &= \frac{1}{i\pi \sinh \sqrt{h}\pi} \left(\frac{1}{n + i\sqrt{h}} + \frac{1}{n - i\sqrt{h}} \right) i \sinh \sqrt{h}\pi \cos n\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2 + h} \cos n\pi \end{aligned} \tag{20}$$

onde usamos, na terceira linha, $\sin n\pi = 0$ e $\sin i\sqrt{h}\pi = i \sinh \sqrt{h}\pi$. Substituindo (15), (19) e (20) em (13), concluímos

$$u(t, x) = \frac{\sinh \sqrt{h}x}{\sinh \sqrt{h}\pi} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + h} e^{-n^2 t} \sin nx . \tag{21}$$

A solução $v_0(x) = x/\pi$ de equilíbrio da equação $-v'' = 0$, com $v(0) = 0$ e $v(\pi) = 1$, na ausência do termo $-hu$, se encontra acima de $v(x) = \sinh \sqrt{h}x / \sinh \sqrt{h}\pi$ em $(0, \pi)$. A extremidade $x = \pi$ em contato com o reservatório à temperatura 1 fornece calor à barra enquanto que a extremidade $x = 0$ à temperatura 0 o absorve. O perfil linear de equilíbrio é alterado devido ao termo $-hu$ que dissipa o calor ao longo da barra contanto que positivo ($v > 0$). No limite em que h tende a 0, por L'Hopital, $v(x)$ se aproxima monotonicamente de $v_0(x)$, por baixo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} v(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh \sqrt{h}x}{\sinh \sqrt{h}\pi} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cosh \sqrt{h}x}{\pi \cosh \sqrt{h}\pi} = \frac{x}{\pi} = v_0(x) . \end{aligned}$$

A solução (21) não é estrita devido a condição inicial (18) do PVIIF para w que, quando estendida para $\mathbb{R}$ como uma função 2π -periódica ímpar, não é contínua na extremidade $x = \pi$. Entretanto, como $-v(x)$ é quadrado integrável em $(0, \pi)$, (21) é uma solução no segundo sentido (em média).