

Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais Não-Homogêneas e Séries de Fourier)

IFUSP - 11 Abril 2016

Exercício 1 Uma fonte externa fornece calor a uma taxa $(\pi/2 - |\pi/2 - x|) e^{-t}$ ao longo de uma barra condutora de extensão π , cuja temperatura inicial é $x(\pi - x)/2$ e em cujas faces: $x = 0$ e $x = \pi$, a temperatura é mantida igual a zero. Nestas condições, o problema de valores inicial e de fronteira (PVIF) é dado por

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = \left(\frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - x \right| \right) e^{-t},$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \frac{x}{2} (\pi - x)$$

para $0 \leq x \leq \pi$. Resolva o PVIF pelo método da variação dos parâmetros.

Exercício 2 Mostre que a solução do seguinte PVIF

$$u_t - u_{xx} + hu = 0, \quad h > 0,$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) = 1, \quad t > 0$$

e condição inicial

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x < \pi$$

é dada por

$$u(t, x) = \frac{\sinh \sqrt{h} x}{\sinh \sqrt{h} \pi} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + h} e^{-n^2 t} \sin nx. \quad (1)$$

Em seguida, interprete fisicamente o termo adicional $-hu(t, x)$ à equação e explique seu papel na distribuição da temperatura de equilíbrio (quando $t \rightarrow \infty$). Obtenha o perfil de equilíbrio no limite em que h tende a 0. A solução (1) do PVIF é uma solução estrita? Argumente.