

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções
(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)
IFUSP - 9 Maio 2016

Exercício 1 (Corda percutida por martelo plano) *Considere o seguinte PVI:*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, com condição de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad (2)$$

para $t > 0$, e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \equiv 0 \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x) = \begin{cases} c & \text{se } |x - a| \leq \delta \\ 0 & \text{se } |x - a| > \delta \end{cases}, \quad (3)$$

para $0 \leq x \leq L$, onde $\delta \leq a \leq L - \delta$. Pelo método de Fourier (separação de variáveis), a solução do PVI dado pelas equações (1), (2) e (3), tem a forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (4)$$

com

$$c_n(t) = b_n \cos \frac{n\pi v}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi v}{L} t \quad (5)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi v}{L} d_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2c}{L} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

são, respectivamente, os coeficientes de Fourier das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódicas, ímpares e tais que $f(x)$ e $g(x)$ em $[0, \pi]$ são dadas por (3). Integrando (7), obtemos

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{2c}{n\pi v} \frac{L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{L} (a - \delta) - \cos \frac{n\pi}{L} (a + \delta) \right) \\ &= \frac{4cL}{n^2 \pi^2 v} \sin \frac{n\pi}{L} a \sin \frac{n\pi}{L} \delta \end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com (4), (5) e (6),

$$u(t, x) = \frac{4cL}{\pi^2 v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi \delta}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi v t}{L}.$$

Observe que a função g não é contínua e sua série de Fourier $Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi v/L) d_n \sin nx$ não converge uniformemente para g em $[0, \pi]$. No entanto, a série de $u(t, x)$ converge uniformemente em $\bar{R}$ para uma função contínua que, por sua vez, é solução do PVIF no sentido generalizado uma vez que uma solução de (1), (2) e (3) no sentido estrito requer, além disso (veja Teorema 5.1, pág. 137 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo), g' contínua e g'' seccionalmente contínua em $[0, \pi]$.

A solução obtida é simétrica com respeito a troca de papel de a com δ porém, esta troca deve respeitar simultaneamente as condições $\delta \leq a \leq L - \delta$ e $a \leq \delta \leq L - a$, caso contrário os limites de integração da integral (7) para os coeficientes d_n 's correspondentes seriam diferentes, resultando duas séries distintas para $u(t, x)$. Como $\delta \leq a$ e $a \leq \delta$ implica a igualdade $a = \delta$, respeitando estas condições temos $a = \delta \leq L/2$ e, por conseguinte, trocar a por δ não muda a função.

Exercício 2 Para obter a equação da energia do PVIF:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} + ku = 0, \quad (8)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) - \alpha u(t, 0) = u_x(t, L) + \beta u(t, L) = 0, \quad t > 0 \quad (9)$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (10)$$

com $\alpha, \beta \geq 0$, procedemos da seguinte maneira.

Recordando que $v^2 = \tau/\rho$, onde ρ e τ , a densidade (linear) e a tensão da corda em repouso, se mantém constante durante o movimento, vamos assumir que u é uma solução no sentido estrito do PVIF. Sendo u da classe C^1 em $\bar{R}$ e da classe C^2 em R , satisfazendo o PVIF, a equação (8) multiplicada por τu_t pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k \tau u u_t \\ &= \rho u_{tt} u_t + \tau u_{xt} u_x + k \tau u u_t - \tau (u_{xt} u_x + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_{tx} + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \end{aligned}$$

a qual, ao integrar em $[0, L]$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L (\rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k \tau u u_t) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k \tau u^2)_t dx - \tau u_x u_t|_0^L \end{aligned} \quad (11)$$

bastando para isso aplicar o teorema fundamental do cálculo ao último termo. Sendo o integrando da expressão acima uma função contínua em R e integrável em $[0, L]$, a derivada com respeito a t pode ser tomada fora da integral. Usando (9), o termo de fronteira pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -\tau u_x u_t|_0^L &= \tau (u_x(t, 0)u_t(t, 0) - u_x(t, L)u_t(t, L)) \\ &= \tau (\alpha u(t, 0)u_t(t, 0) + \beta u(t, L)u_t(t, L)) \\ &= \frac{\tau}{2} (\alpha u(t, 0)^2 + \beta u(t, L)^2)_t . \end{aligned} \quad (12)$$

As equações (11) e (12) juntas resultam em

$$\frac{d\tilde{E}}{dt}(t) = 0$$

onde

$$\tilde{E}(t) = E(t) + \frac{\tau}{2} (\alpha u(t, 0)^2 + \beta u(t, L)^2) . \quad (13)$$

A energia da corda

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k\tau u^2) dx \quad (14)$$

não é uma quantidade conservada pelo movimento devido a condição de fronteira (9). A quantidade $\tilde{E}(t)$, que se conserva pelo movimento, pode ser escrita em termos dos dados iniciais (10) do problema:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g(x)^2 + \tau f'(x)^2 + k\tau f(x)^2) dx + \frac{\tau}{2} (\alpha f(0)^2 + \beta f(L)^2) . \quad (15)$$

Admitindo a existência de uma solução $u(t, x)$ do PVIF no sentido estrito, vamos provar que ela é única. Supondo que haja duas possíveis soluções do PVIF $u^1(t, x)$ e $u^2(t, x)$, a diferença

$$w(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x)$$

satisfaz o PVIF (8), (9) com (10) substituído pelo dado inicial trivial:

$$\frac{1}{v^2} w_{tt} - w_{xx} + kw = 0 ,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$,

$$w_x(t, 0) - \alpha w(t, 0) = w_x(t, L) + \beta w(t, L) = 0 , \quad t > 0$$

e

$$w(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad w_t(0, x) = 0 , \quad 0 \leq x \leq L .$$

A quantidade $\tilde{E}(t)$ deste problema, devido sua conservação e a (15), satisfaz

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$$

de onde se conclui, tendo em vista (14) e (13),

$$\frac{1}{2} \int_0^L (\rho w_t^2 + \tau w_x^2 + k\tau w^2) dx + \frac{\tau}{2} (\alpha w(t, 0)^2 + \beta w(t, L)^2) = 0$$

e, conseqüentemente, devido a continuidade do integrando em $\bar{R}$,

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &= w_x(t, x) = w(t, x) = 0, & t > 0, \quad 0 < x < L \\ w(t, 0) &= w(t, L) = 0, & t > 0 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$w(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

resultando, devido a continuidade de $w(t, x)$ em $\bar{R}$, a contradição:

$$w(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x) = 0, \quad \text{em } \bar{R},$$

a saber, caso exista, $u(t, x)$ é a única solução do PVIF definido pelas equações (8), (9) e (10).

As condições de fronteira do tipo (9) são atribuídas por Djairo, pág 134, ao final da Sec. 5.1, de “Análise de Fourier e EDP”, a uma conexão elástica às extremidades da corda. De fato, os termos adicionais à equação de energia da corda proporcionais a u^2 , tanto a integral de $k\tau u^2/2$ quanto os termos de fronteira, são da forma de uma energia potencial elástica.