

Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I
(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Parseval)
IFUSP - 20 Maio 2016

Exercício 1 Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \cos kx & \text{se } |x| \leq N\pi/k \\ 0 & \text{se } |x| > N\pi/k \end{cases}$$

onde N e k são inteiros positivos. A função $f(x)$ pertence a classe $\mathcal{L}^1$ das funções integráveis e absolutamente integráveis no sentido impróprio? A função transformada $\hat{f}(\xi)$ calculada é contínua nos pontos $\xi = \pm k$? Argumente.

3.

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$$

4.

$$f(x) = e^{-a|x|} \sin cx, \quad a > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Utilize para o cálculo de $\hat{f}(\xi)$ a propriedade da transformada de Fourier da modulação de $f(x)$ por $e^{\pm icx}$ e o resultado do item 3.

Exercício 2 (i) Calcule a função $f(x)$ cuja transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin b\xi}{\xi} e^{-a\xi^2}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

(ii) Verifique, em seguida, o teorema de Plancherel–Parseval: $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$ para a função Gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/(2a)}.$$

Indicação: Para primeira parte, utilize os teoremas da convolução e a fórmula da inversa (Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto “Análise de Fourier e EDP”, Djairo G. de Figueiredo):

$$f = (\hat{f})^\vee = (\hat{\chi}\hat{\phi})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * \phi$$

onde $\hat{\chi}(\xi) = (1/\xi) \sin b\xi$ e $\hat{\phi}(\xi) = e^{-a\xi^2}$.