

Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Teorema da Convolução e fórmula da Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 3 Junho 2016

Exercício 1 (Vibrações forçadas) Use a transformada de Fourier para obter a fórmula de D'Alembert (veja última fórmula da Sec. 5.7 na pág.160 de "Análise de Fourier e EDP", Djairo G. de Figueiredo)

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy + \frac{v}{2} \int_0^t \left(\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} h(\tau, y) dy \right) d\tau$$

do problema de valor inicial (PVI) para as vibrações forçadas de uma corda elástica infinita:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = h(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0, x) = f(x) \quad e \quad u_t(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Indicação: Note que $x(t) = b \cos at + d \frac{\sin at}{a} + \int_0^t \frac{\sin a(t-\tau)}{a} c(\tau) d\tau$ satisfaz a equação $x'' + a^2 x = c(t)$ com $x(0) = b$ e $x'(0) = d$.

Exercício 2 (Equação do calor não-homogênea) Use a transformada de Fourier para resolver o problema de valor inicial (PVI) não-homogêneo

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} - bu = g(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $b > 0$, $f(x)$ e $g(t, x)$, para cada $t > 0$, são funções de $\mathcal{S}$ (classe de Schwartz).