

Nona Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Polinômios de Legendre – Aplicações em Eletromagnetismo e Condução do Calor)

IFUSP - 25 de Junho 2016

Exercício 1 Considere o PVF para o potencial eletrostático $\phi = \phi(r, \theta)$, $r \geq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, devido a uma esfera condutora neutra de raio a colocada em um campo elétrico uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ na direção do eixo z :

$$\nabla^2 \phi = 0 , \quad (1)$$

em $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : r = |\mathbf{x}| > a\}$, com

$$\phi(a, \theta) = 0 , \quad 0 \leq \theta \leq \pi , \quad (2)$$

e

$$\phi(r, \theta) = -E_0 z \quad (3)$$

$$= -e_0 r \cos \theta , \quad \text{quando } r \rightarrow \infty ,$$

devido ao campo elétrico $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ no interior do condutor ser nulo e concordar com $\mathbf{E}_0$ no infinito.

Pelo método de separações de variáveis (veja Cap. 4 de “Notas de Física Matemática”, Profa. Carmen Lys R. Braga), a solução geral de (1) em coordenadas curvilíneas esféricas (independente de φ , por simetria azimutal) regular em θ nos pontos extremos 0 e π , é

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) , \quad (4)$$

onde os polinômios de Legendre $P_l(x)$ de grau $l = 0, 1, 2, \dots$: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2$ e etc., são ortogonais com respeito ao produto interno em $[-1, 1]$:

$$(P_l, P_m) = \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm} . \quad (5)$$

Pela condição assintótica (3), todos os termos da soma (4) com crescimento em r mais rápido que linear no infinito devem se anular e, como $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, temos

$$A_1 = -E_0 .$$

$$A_l = 0 , \quad l \geq 2 . \quad (6)$$

Substituindo (6) em (4), a equação (2):

$$0 = \phi(a, \theta) = -E_0 a \cos \theta + A_0 + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-l-1} P_l(\cos \theta) ,$$

com $x = \cos \theta$, pode ser escrita como

$$A_0 + \frac{B_0}{a} + \sum_{l=1}^{\infty} B_l a^{-l-1} P_l(x) = E_0 a x , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

a partir da qual, juntamente com a ortogonalidade (5) dos polinômios de Legendre, resulta

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 a , \\ B_1 &= E_0 a^3 , \\ B_l &= 0 , \quad l \geq 2 . \end{aligned} \tag{7}$$

O potencial eletrostático (4) com (6) e (7)

$$\phi(r, \theta) = A_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) + E_0 a \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{r}{a}\right) \cos \theta$$

depende ainda de uma constante A_0 arbitrária. Para determiná-la usaremos a hipótese de neutralidade do condutor. Como não há alguma carga na origem nem uma distribuição de cargas uniforme sobre a superfície do condutor de densidade $A_0 \epsilon_0 / a$, o termo $-A_0 a / r$, correspondente ao potencial de uma entre as duas possibilidades: carga na origem ou distribuída uniformemente na superfície esférica, não pode estar presente na solução. De onde se conclui que $A_0 = 0$ e

$$\phi(r, \theta) = E_0 a \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{r}{a}\right) \cos \theta \tag{8}$$

é a solução do PVF.

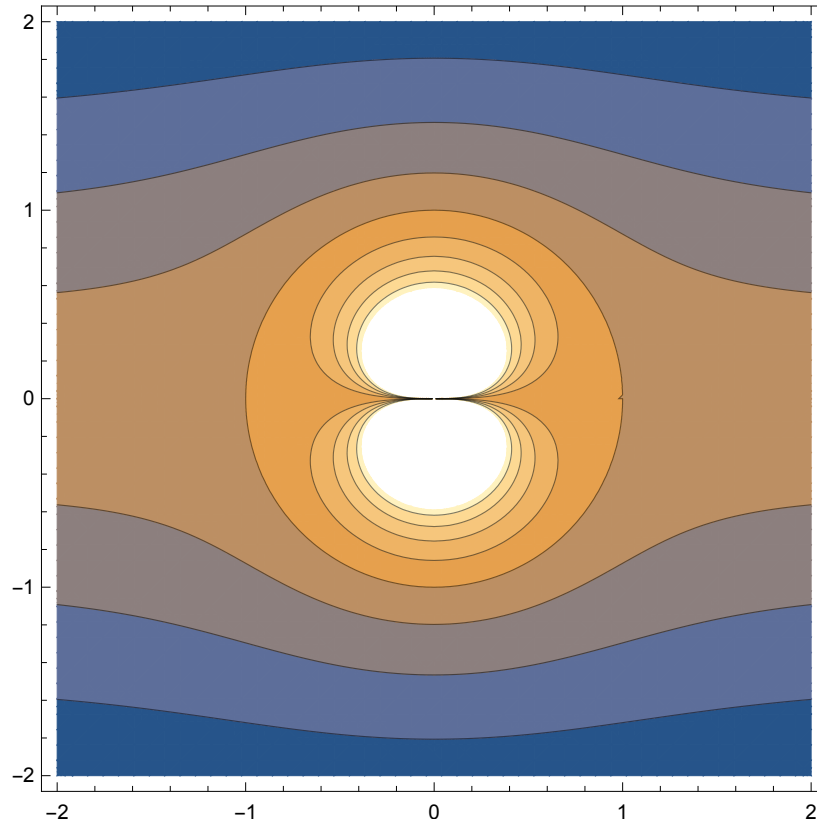


Figure 1: Equipotenciais da solução $\phi(r, \theta)$

A densidade superficial de carga induzida na superfície do condutor, dada por

$$\begin{aligned}\sigma &= \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}(a, \theta) \\ &= \varepsilon_0 E_0 a \left(\frac{-2a^2}{r^3} - \frac{1}{a} \right) \Big|_{r=a} \cos \theta \\ &= -\varepsilon_0 E_0 \cos \theta\end{aligned}$$

é anti-simétrica com respeito ao plano xy , negativa no hemisfério superior e positiva no hemisfério inferior, correspondendo, quando vista de um ponto fora do condutor, a um dipolo na origem. Note que sua carga total é nula.

O primeiro termo da solução (8) é o potencial de um dipolo enquanto que o segundo é o potencial do campo elétrico uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$. O efeito causado pela inserção do condutor esférico no campo uniforme é a indução de um dipolo e a consequente deformação deste (veja Figura 1 das equipotenciais de $\phi(r, \theta)$).

Exercício 2 Faremos uso da função geratriz

$$F(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \quad (9)$$

dos polinômios de Legendre $P_l(x)$, $l \geq 0$, para deduzir a relação

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1) P_l(x) , \quad l \geq 1 . \quad (10)$$

Para isso, verifiquemos primeiramente que F satisfaz a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$2tF_t + \left(t - \frac{1}{t}\right) F_x + F = 0 . \quad (11)$$

Diferenciando F com respeito a t e x , temos

$$\begin{aligned}2tF_t &= 2t \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} \cdot (-2(x - t)) \\ &= \frac{2(tx - t^2)}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(t - \frac{1}{t}\right) F_x &= \left(t - \frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} \cdot (-2t) \\ &= \frac{t^2 - 1}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$2tF_t + \left(t - \frac{1}{t}\right) F_x + F = \frac{2tx - 2t^2 + t^2 - 1 + 1 - 2tx + t^2}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} = 0 .$$

Como $|P_l(x)| \leq 1$ para $x \in [-1, 1]$, a série em (9) é uniformemente convergente em qualquer retângulo fechado $R_\delta = [-\delta, \delta] \times [-1, 1]$ com $0 < \delta < 1$ e pode, portanto, ser diferenciada termo a termo. Substituindo a série em (11), temos

$$\begin{aligned} 0 &= P_0 + \sum_{l=1} \left(2lP_l + \left(t - \frac{1}{t} \right) P'_l + P_l \right) t^l \\ &= P_0 - P'_1 + \sum_{l=1} ((2l+1)P_l + P'_{l-1} - P'_{l+1}) t^l \\ &= \sum_{l=1} ((2l+1)P_l + P'_{l-1} - P'_{l+1}) t^l . \end{aligned} \quad (12)$$

Na primeira linha separamos o termo com $l = 0$ dos demais com $l \geq 1$. Na segunda linha renomeamos a série $\sum_{l=1} P'_l t^{l+1} = \sum_{l=1} P'_{l-1} t^l$, incluindo o termo $P'_0 = 0$, e a série $\sum_{l=1} P'_l t^{l-1} = P'_1 + \sum_{l=1} P'_{l+1} t^l$. Na terceira e última linha, usamos $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e, conseqüentemente, $P'_1(x) = P_0(x)$.

Como os monômios t^l , $l = 1, 2, \dots$, formam um conjunto L. I. de funções em $[-\delta, \delta]$ e a série se anula uniformemente em R_δ , os coeficientes da série devem se anular termo a termo, de onde se conclui a relação (10).

Exercício 3 A temperatura de equilíbrio $U = U(r, \theta)$ no interior de um sólido condutor hemisférico de raio a , cuja parte esférica de sua superfície é mantida a temperatura T_0 enquanto que sua superfície plana se encontra à temperatura zero, satisfaz um problema de Dirichlet:

$$\nabla^2 U = 0 , \quad (13)$$

no interior do hemisfério $H_a = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ sujeita às condições

$$\begin{aligned} U(a, \theta) &= T_0 , & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ U\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= 0 , & 0 \leq r \leq a \end{aligned} \quad (14)$$

em sua superfície $\Gamma_a = \{r = a, 0 \leq \theta < \pi/2\} \cup \{0 < r \leq a, \theta = \pi/2\}$. Note que o problema independe da variável φ devido sua simetria azimutal.

Como no exercício 1, a solução geral de (13) regular na origem é dada por (4) com os coeficientes B_l 's iguais a 0:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) . \quad (15)$$

Pela segunda equação em (14) e o fato dos monômios $\{r^l, l = 0, 1, 2, \dots\}$ formarem um conjunto L. I. de funções em $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} U\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} r^{2k} P_{2k}(0) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

implica que os coeficientes pares da solução (15) devem se anular

$$A_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Na segunda linha de (16) usamos a paridade dos polinômios de Legendre:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

afim de se concluir que os polinômios ímpares se anulam em $x = 0$: $P_{2k+1}(0) = 0$, enquanto que os polinômios de ordem pares diferem de 0, podendo ser calculados pela série de Taylor função geratriz (9) em $x = 0$ (veja pág. 46 de “Notas de Física Matemática”, Profa. Carmen Lys R. Braga):

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}. \quad (18)$$

Pela primeira equação em (14) com $x = \cos \theta$, (15) e (17),

$$\phi(a, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} P_{2k+1}(x) = T_0$$

onde os $a_{2k+1} = A_{2k+1} a^{2k+1}$ são constantes a serem determinadas pela ortogonalidade (5) dos polinômios de Legendre $P_{2k+1}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Observe que o lado esquerdo da segunda igualdade é uma função ímpar, devido a paridade dos $P_{2k+1}(x)$'s, enquanto que a função do lado direito deve, conseqüentemente, ser estendida para o intervalo $[-1, 1]$ como uma função ímpar ($f(0) = 0$)

$$f(x) = \begin{cases} T_0 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -T_0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

De onde se conclui, por (5), (10) e (18), tomando $l = 2k + 1$,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \\ &= T_0 \int_0^1 (2l+1) P_l(x) dx \\ &= T_0 \int_0^1 (P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)) dx \\ &= T_0 (P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)) \Big|_0^1 \\ &= T_0 (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \\ &= T_0 (P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)) \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \left(1 + \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right) T_0 \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \left(1 + \frac{2n+1}{2(n+1)} \right) T_0 \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} T_0. \end{aligned}$$

resultando ao substituir em (15), com $A_{2k+1} = a_{2k+1}/a^{2k+1}$,

$$\phi(r, \theta) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} \frac{r^{2k+1}}{a^{2k+1}} P_{2k+1}(\cos \theta) .$$