

Nona Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Polinômios de Legendre – Aplicações em Eletromagnetismo e Condução do Calor)

IFUSP - 15 Junho 2016

Exercício 1 Calcule o potencial eletrostático ϕ devido a uma esfera condutora neutra de raio a colocada em um campo elétrico uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ na direção do eixo z . Calcule em seguida a densidade de carga $\sigma = \epsilon_0 \partial\phi/\partial r|_{r=a}$, induzida pelo campo na superfície do condutor.

Indicação: Pela invariância azimutal do problema, $\phi = \phi(r, \theta)$ independe da variável φ . Sendo nulo o potencial na esfera condutora, o problema se reduz ao seguinte PVF:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \phi_\theta)_\theta = 0, \quad r > a, \quad 0 < \theta < \pi \quad (1)$$

com $\phi(a, \theta) = 0$ e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r, \theta)}{r} = -E_0 \cos \theta$$

para $0 \leq \theta \leq \pi$, devido ao campo $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ser assintoticamente uniforme no infinito: $\phi \sim -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$.

Exercício 2 Utilize a função geratriz $F(t, x) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2}$ dos polinômios de Legendre $P_l(x)$, $l \geq 0$, para deduzir a relação

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1) P_l(x), \quad l \geq 1. \quad (2)$$

Indicação: Verifique que F satisfaz a equação diferencial parcial de primeira ordem $2tF_t + (t - 1/t)F_x + F = 0$ e obtenha (2) substituindo a expansão $F(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$ nesta equação.

Exercício 3 Determine a temperatura de equilíbrio U no interior do sólido condutor hemisférico de raio a , cuja parte esférica de sua superfície é mantida a temperatura T_0 enquanto que sua superfície plana se encontra à temperatura zero. Em outras palavras, resolva o seguinte problema de Dirichlet para equação de Laplace para $U = U(r, \theta)$:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 U_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta U_\theta)_\theta = 0, \quad r < a, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

sujeita às condições

$$U(a, \theta) = T_0, \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \quad e \quad U(r, \pi/2) = 0, \quad 0 \leq r \leq a$$

Indicação: Utilize o método das imagens para estender o problema para uma região esférica por paridade ímpar. Use (2) para o cálculo da integral dos coeficientes da solução em série de polinômios ortogonais de Legendre.