

Lista Especial de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Número complexo, sequência de Cauchy, função exponencial e movimento harmônico simples)

IFUSP - 18 de Agosto de 2018

Exercício 1 Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, é um número complexo (denotamos por $z \in \mathbb{C}$) definimos o **complexo conjugado** e **módulo** de z por $\bar{z} = x - iy$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

P1 Qual é a interpretação geométrica de $\bar{z}$ e $|z|$.

Resposta: Um número complexo $z = x + iy$ pode ser representado por um ponto de coordenadas (x, y) , em relação aos eixos cartesianos correspondentes a sua parte real (eixo horizontal) e a sua parte imaginária (eixo vertical), do plano $\mathbb{R}^2$. Estabelecemos desta forma uma relação biunívoca entre elementos $z \in \mathbb{C}$ e elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ do produto Cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ com ele mesmo.

O complexo conjugado $\bar{z} = x - iy$ de z , que pela relação estabelecida entre os conjuntos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ associamos ao ponto $(x, -y)$, pode ser interpretado geometricamente como sendo a reflexão especular de $z = x + iy$ em relação ao eixo x .

Interpretamos, por esta analogia, o módulo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de z como sendo o comprimento do raio vetor formado pelo segmento de reta ligando o ponto (x, y) à origem $(0, 0)$. Da maneira análoga, interpretamos o módulo $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ da diferença $z - z_0$ entre dois pontos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x + iy$, ambos em $\mathbb{C}$, como sendo a distância Euclideana entre os pontos (x_0, y_0) e (x, y) em $\mathbb{R}^2$ ou o comprimento do segmento que os ligam.

P2 $|z| = 0$ implica que $z = 0$.

Prova: Por hipótese, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Da interpretação geométrica, o raio vetor do ponto (x, y) associado à $z = x + iy$ ou comprimento do segmento ligando a origem $(0, 0)$ à (x, y) , é nulo. Disso segue que $(x, y) = (0, 0)$ e, pela relação biunívoca entre os conjuntos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, concluímos que $z = 0$.

Sejam z , z_1 e z_2 números complexos e $\lambda \in \mathbb{R}$. Demonstre as seguintes propriedades

P3 $|\lambda z| = |\lambda| |z|$.

Prova: Usando as definições e propriedades de números reais, temos $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ e

$$|\lambda z| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| |z|$$

P4 $|z|^2 = z\bar{z}$.

Prova: Usando a álgebra dos números complexos: $i \cdot (-i) = (-i) \cdot i = 1$, $1 \cdot (\pm i) = (\pm i) \cdot 1 = \pm i$ e $1 \cdot 1 = 1$, definição de $\bar{z}$ e propriedade distributiva, temos

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx + i(-i)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

P5 Desigualdade triangular $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Prova: Temos

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\
 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2)} .
 \end{aligned} \tag{1}$$

Usando $0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2$, obtemos a desigualdade

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

que por sua vez implica

$$\begin{aligned}
 (x_1x_2 + y_1y_2)^2 &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \\
 &\leq x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)
 \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
 (x_1x_2 + y_1y_2) &\leq |x_1x_2 + y_1y_2| \\
 &= \sqrt{(x_1x_2 + y_1y_2)^2} \\
 &\leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} .
 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) segue que, devido a monotonicidade da função raiz quadrada ($0 < a \leq b \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$), já empregada em (2),

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2| &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)}} \\
 &= \sqrt{\left(\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\
 &= |z_1| + |z_2| .
 \end{aligned}$$

A desigualdade triangular é deduzida mais facilmente de sua interpretação geométrica, como a demonstração de Euclides no seu texto sobre geometria. A soma vetorial $z_1 + z_2$ define os três vértices de um triângulo ABC de coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ a soma dos comprimentos $|AB| + |BC|$ dos segmentos AB e BC é sempre maior ou igual ao comprimento $|AC|$ do segmento AC e isso reproduz a desigualdade. Veja prova de Euclides na Wikipedia.

$$P6 \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Prova: Pela definição de módulo e álgebra dos números complexos, temos

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| \\ &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= |z_1| |z_2|. \end{aligned}$$

$$P7 \quad |1/z| = 1/|z|, \quad z \neq 0.$$

Prova: Da álgebra dos números complexos, temos que

$$1/z = \bar{z}/(z\bar{z}) \stackrel{P4}{=} \bar{z}/|z|^2. \quad (3)$$

Mas, pela definição de módulo, $|\bar{z}| = |z|$ e, portanto,

$$|1/z| = |\bar{z}/|z|^2| = |\bar{z}|/|z|^2 = |z|/|z|^2 = 1/|z|.$$

$$P8 \quad 1/z = \bar{z} \text{ se } |z| = 1.$$

Prova: Segue de (3) com $|z|^2 = 1$ que $1/z = \bar{z}$.

Exercício 2 Uma sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ de números complexos é dita **convergente** se existir $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w| = 0,$$

e dizemos que w é o limite da sequência. Uma sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ é dita ser uma **sequência de Cauchy** se para cada $\varepsilon > 0$ existir um natural $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|w_n - w_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

A série $\sum_{n \geq 1} z_n$ de números complexos **converge** se a sequência $(S_N)_{N \geq 1}$ formada pelas somas parciais $S_N = \sum_{1 \leq n \leq N} z_n$ for convergente. Demonstre as seguintes afirmações

P9 Uma sequência convergente de números complexos tem um único limite.

Prova: Suponha, por contradição, que existam dois limites, w^1 e w^2 , com $w^1 \neq w^2$, da sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ de números complexos. Como, por hipótese, a sequência é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w^i| = 0$, $i = 1, 2$, temos

$$0 < |w^1 - w^2| = |w_n - w^1 - (w_n - w^2)| \stackrel{P5}{\leq} |w_n - w^1| + |w_n - w^2| .$$

Passando o limite, obtemos a contradição $0 < 0$. Logo $w^1 = w^2$.

P10 Uma sequência de números complexos converge se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.

Prova: Vamos assumir que a afirmação é verdadeira para o conjunto dos números reais. Para uma prova, veja Djairo G. de Figueiredo, *Análise I*. Seja $(z_n)_{n \geq 1}$, com $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, uma sequência de números complexos. Se as sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ de reais forem convergentes para x e y , então com $z = x + iy$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x + i(y_n - y)| \stackrel{P4}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n - x| + |y_n - y|) = 0$$

e $(z_n)_{n \geq 1}$ converge para z . Suponha agora que $(z_n)_{n \geq 1}$, $z_n = x_n + iy_n$, seja uma sequência convergente para $z = x + iy$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ||x_n - x| - |y_n - y|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x + i(y_n - y)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

e pela propriedade P2 as sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ reais convergem para x e y .

Por outro lado, suponha que as sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ reais convirjam para x e y e, portanto, sejam sequências de Cauchy. Então

$$|z_n - z_m| = |x_n - x_m - i(y_n - y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \leq 2\varepsilon .$$

Logo, a sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ convergente para $z = x + iy$ é também uma sequência de Cauchy. Suponha a sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de Cauchy, então

$$||x_n - x_m| - |y_n - y_m|| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$$

e por continuidade da função $z \mapsto |z|$ (propriedade P2) ambas sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ são de Cauchy e, portanto, sequências convergentes implicando, pelo que foi provado anteriormente, que a sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ é convergente.

P11 Se $(z_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de números complexos satisfazendo $|z_n| \leq a_n$, e $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais não negativos tal que a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, então a série

$$\sum_{n \geq 1} z_n \text{ converge.}$$

Prova: Vamos aplicar o critério de convergência de Cauchy. Sejam $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ e $(A_n)_{n \geq 1}$ a sequência complexa das séries parciais $\sigma_n = \sum_{k=1}^n z_k$ e a sequência das séries parciais positivas $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$

que, por hipótese, é convergente. Da propriedade P10, $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy e dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n, m > N(\varepsilon)$ tais que $n > m$, $A_n - A_m < \varepsilon/2$. Observe que

$$|\sigma_n| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k = A_n . \quad (4)$$

Portanto, para todo $n, m > N(\varepsilon)$ tais que $n > m$, temos

$$|\sigma_n - \sigma_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k| \leq \sum_{k=m+1}^n a_k = A_n - A_m < \varepsilon$$

provando que a sequência complexa $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ de séries parciais é de Cauchy e, pelas propriedades P9 e P10, $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge, isto é, $\sigma = \sum_{n \geq 1} z_n$ é o único limite da sequência de suas séries parciais.

Exercício 3 Para $z \in \mathbb{C}$, definimos a **exponencial de z** por

$$e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} . \quad (5)$$

Demonstre que

P12 A função exponencial é bem definida pela série complexa (5).

Prova: Considere a sequência complexa $(\eta_n)_{n \geq 1}$ das séries parciais $\eta_n = \eta_n(z) = \sum_{k=1}^n z^k/k!$. Sabemos por P9 que, se para um dado $z \in \mathbb{C}$ a sequência $(\eta_n(z))_{n \geq 1}$ converge, o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(z) = \eta(z)$ é univocamente definido. A função e^z é, portanto, bem definida pelo limite $\eta(z)$ para todo z tal que a sequência de séries parciais converge. Vamos mostrar que $(\eta_n(z))_{n \geq 1}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Pelo critério P11, basta encontrar uma sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ de séries parciais majorante.

Dado $R > 0$, tão grande quanto se queira, seja $A_n = \sum_{k=1}^n R^k/k!$. Então, procedendo de maneira similar a (4), juntamente com P6, temos

$$|\eta_n|(z) = \left| \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{R^k}{k!} .$$

De onde se conclui que

$$|\eta_n|(z) \leq A_n , \quad \forall n \geq 1 \text{ e } |z| \leq R ,$$

e devido a propriedade P11, a função exponencial é bem definida para todo $z \in \mathbb{C}$. A convergência é de fato **uniforme** para cada subconjunto limitado de $\mathbb{C}$, ou seja, $(\eta_n(z))_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy para um mesmo ε e $N(\varepsilon)$, uniformemente em z pertencente a esta região.

P13 Se z_1 e z_2 são dois números complexos, então $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Prova: Devido ao teorema binomial,

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

onde $\binom{n}{k} = n! / (k!(n-k)!)$ é o coeficiente binomial, temos

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z_1^k \frac{1}{(n-k)!} z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z_1^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z_1^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z_2^m = e^{z_1} e^{z_2} . \end{aligned}$$

onde ao denotarmos $n - k = m$, desacoplamos a soma sobre m da soma sobre k .

*P14 Se z for puramente imaginário: $z = iy$, então temos a conhecida **identidade de Euler***

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y . \quad (6)$$

Prova: Pela definição e pela álgebra $(i)^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ e $(-1)^{2k+1} = (-1)^k i$, temos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

onde as funções $\cos y$ e $\sin y$ são bem definidas por sua série de Taylor, convergente para todo $y \in \mathbb{R}$.

P15 Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, então $|e^z| = e^x$ e

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) . \quad (7)$$

Prova: A primeira igualdade segue de P13, P6 e $|e^{iy}| = 1$,

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x$$

pois $e^x > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. A igualdade (7) segue de P6 e P14.

P16 $e^z = 1$ se, e somente se, $z = 2\pi ik$ para algum inteiro k .

Prova: Suponhamos que $z = 2\pi ik$. Por P6 e P14, temos

$$e^z = e^{2\pi ik} = (e^{2\pi i})^k = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^k = (1)^k = 1.$$

Por outro lado, suponhamos que $e^z = 1$. Então, por P15, temos

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = 1$$

implica $x = 0$, $\sin y = 0$ e $\cos y = 1$. As raízes da função seno são múltiplos inteiros de π e a condição sobre o cosseno é satisfeita somente para os múltiplos pares de π . Portanto $z = 2\pi ik$ para k um inteiro.

P17 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, pode ser escrito na forma $z = re^{i\theta}$ onde $0 \leq r < \infty$ é único e $\theta \in \mathbb{R}$ é único a menos de um inteiro múltiplo de 2π . Verifique que $r = |z|$ e $\theta = \arctan(y/x)$.

Prova: A mudança de coordenadas Cartesianas à polares,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

define uma relação biunívoca entre pontos do plano puncturado $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e da faixa semi-infinita $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Quando a variável θ é estendida a $\mathbb{R}$ interpretamos geometricamente como se tivéssimos infinitas cópias do plano, um eixo perpendicular atravessando a origem de todas elas, e a partir dos quais um corte que se estende ao longo do eixo x positivo, alinhados em relação as cópias, permite que passamos de um a outro plano. Pela interpretação geométrica P1 e por intermédio desta transformação, escrevemos um número complexo $z = re^{i\theta}$, onde $0 \leq r < \infty$ e $\theta \in \mathbb{R}$, módulo 2π . As variáveis (r, θ) são obtidas a partir de (x, y) pela transformação inversa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

sendo esta última equação definida em algum dos infinitos ramos da função $\theta \mapsto \tan \theta$ definida em cada superfície de Riemann (cópias do plano complexo aludido acima).

*P18 Dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostre as (também) chamadas **identidades de Euler***

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad e \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Prova: Seja $z = e^{i\theta}$ e considere a fórmula de Euler (6) com $y = \theta$. Temos,

$$\cos \theta = \Re(z) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ,$$

onde, por definição, $\bar{z} = x - iy$ troca o sinal da componente y acarretando a troca de sinal da variável θ , pela paridade ímpar da função arco-tangente (a mesma da tangente). Analogamente,

$$\sin \theta = \Im(z) = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) .$$

P19 Verifique que $f(x) = e^{inx}$ é periódica de período 2π e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} .$$

Prova: Vamos mostrar que $f(x + 2\pi) = f(x)$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Pelas propriedades da exponencial complexa P13 e P16, temos

$$e^{in(x+2\pi)} = e^{inx} e^{2\pi in} = e^{inx} , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Usando P14, a integral complexa para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx + i \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sin nx - i \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin n\pi = 0 . \end{aligned}$$

Para $n = 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 .$$

Exercício 4 Prove que, se $x = x(t)$ é uma função em $\mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável e solução da equação

$$x'' + c^2 x = 0 \tag{8}$$

então existem constantes a e b tais que $x(t) = a \cos ct + b \sin ct$.

Prova: Sejam

$$y(t) = x(t) \cos ct - \frac{1}{c} x'(t) \sin ct$$

e

$$w(t) = x(t) \sin ct + \frac{1}{c} x'(t) \cos ct$$

duas funções definidas em $\mathbb{R}$ nas quais $x(t)$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável e solução da equação (8). Portanto, $y(t)$ e $w(t)$ são continuamente diferenciáveis e a derivada destas funções satisfaz, devido a (8),

$$\begin{aligned} y'(t) &= -cx \sin ct - x'(t) \cos ct + x'(t) \cos ct - \frac{1}{c} x''(t) \sin ct \\ &= -cx \sin ct - x'(t) \cos ct + x'(t) \cos ct + cx(t) \sin ct = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}w'(t) &= cx \cos ct - x'(t) \sin ct + x'(t) \sin ct + \frac{1}{c}x''(t) \cos ct \\&= cx \cos ct - x'(t) \sin ct + x'(t) \sin ct - cx(t) \cos ct = 0\end{aligned}$$

de onde se conclui que estas quantidades são mantidas iguais a uma constante ao longo do tempo. Sejam a e b reais quaisquer. Escrevemos, o sistema de equações

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) \cos ct - \frac{1}{c}x'(t) \sin ct = a \\w(t) &= x(t) \sin ct + \frac{1}{c}x'(t) \cos ct = b\end{aligned}$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \cos ct & -(1/c) \sin ct \\ \sin ct & (1/c) \cos ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

cuja solução para $x(t)$ e $x'(t)$ é dada pela aplicação pela esquerda da matriz inversa $A^{-1} = \text{Cof}(A)^T / \det A$ ($\text{Cof}(A)$ é matriz dos cofatores de A) da matriz A em ambos lados da igualdade:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ct & \sin ct \\ -c \sin ct & c \cos ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos ct + b \sin ct \\ -ac \sin ct + bc \cos ct \end{pmatrix}.$$