

Lista Especial de Exercícios de Física Matemática I

(Número complexo, sequência de Cauchy, função exponencial complexa e movimento harmônico simples)

IFUSP - Agosto de 2018

Exercício 1 Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, é um número complexo (denotamos por $z \in \mathbb{C}$) definimos o **complexo conjugado** e **módulo** de z por $\bar{z} = x - iy$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. **a.** Qual é a interpretação geométrica de $\bar{z}$ e $|z|$? **b.** Se $|z| = 0$, mostre que $z = 0$; **c.** Sejam z, z_1 e z_2 números complexos e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que **i.** $|\lambda z| = |\lambda| |z|$, **ii.** $|z|^2 = z\bar{z}$, **iii.** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, **iv.** $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, **v.** $|1/z| = 1/|z|$, $z \neq 0$ e **vi.** $1/z = \bar{z}$ se $|z| = 1$.

Exercício 2 Uma sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ de números complexos é dita **convergente** se existir $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w| = 0,$$

e dizemos que w é o limite da sequência. Uma sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ é dita ser uma **sequência de Cauchy** se para cada $\varepsilon > 0$ existir um natural $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|w_n - w_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

A série $\sum_{n \geq 1} z_n$ de números complexos **converge** se a sequência $(S_N)_{N \geq 1}$ formada pelas somas parciais $S_N = \sum_{1 \leq n \leq N} z_n$ for

convergente. **a.** Mostre que uma sequência convergente de números complexos tem um único limite; **b.** Prove que uma sequência de números complexos converge se, e somente se, for uma sequência de Cauchy (**Dica:** Existe um teorema similar para sequências de números reais. Por que este mesmo teorema se aplica para sequências de números complexos?); **c.** Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais não negativos tal que a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Mostre que, se $(z_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de números complexos

satisfazendo $|z_n| \leq a_n$, então a série $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge. (**Dica:** Use o critério de convergência de Cauchy, item **b.**)

Exercício 3 Para $z \in \mathbb{C}$, definimos a **exponencial** de z por

$$e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

a. Prove que esta definição faz sentido, mostrando que a série converge para todo z complexo. (A convergência é de fato **uniforme** para cada subconjunto limitado de $\mathbb{C}$) **b.** Se z_1 e z_2 são dois números complexos, prove que $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (**Dica:** Use o teorema binomial para expandir $(z_1 + z_2)^n$). **c.** Mostre que se z for puramente imaginário: $z = iy$, então temos a conhecida **identidade de Euler**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

d. Em mais geralidade, mostre que, se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $|e^z| = e^x$ e

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

e. Mostre que $e^z = 1$ se, e somente se, $z = 2\pi i k$ para algum inteiro k . **f.** Mostre que $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, pode ser escrito na forma $z = re^{i\theta}$ onde $0 \leq r < \infty$ é único e $\theta \in \mathbb{R}$ é único a menos de um inteiro múltiplo de 2π . Verifique que $r = |z|$ e $\theta = \arctan(y/x)$. **g.** Dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostre as também chamadas **identidades de Euler**

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad e \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

e. Verifique que $f(x) = e^{inx}$ é periódica de período 2π e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}.$$

Exercício 4 Prove que, se $x = x(t)$ é uma função em $\mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável e solução da equação

$$x'' + c^2 x = 0 \tag{1}$$

então existem constantes a e b tais que $x(t) = a \cos ct + b \sin ct$.

(**Dica:** Para isso, diferencie em relação a t as funções $y(t) = x(t) \cos ct - (1/c)x'(t) \sin ct$ e $w(t) = x(t) \sin ct + (1/c)x'(t) \cos ct$, use a equação (1) e resolva o sistema para $x(t)$).