

Primeira Lista (Part I) de Exercícios de Física Matemática I

(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira)

IFUSP - Agosto 2018

Exercício 1 A temperatura $u = u(t, x)$ de uma barra condutora isolada de comprimento $L = \pi$ e difusibilidade $\kappa = 1$ satisfaz a equação do calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (1)$$

em $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 < x < \pi\}$, juntamente com as condições inicial

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2)$$

e de fronteira

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Se o perfil de temperatura da barra em $t = 0$ é dado pela série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (4)$$

sabemos que (derivando termo-a-termo a série sem se preocupar com sua convergência)

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx \quad (5)$$

satisfaz as equações (1), (2) e (3).

Determine a solução (5) do problema de valores inicial e de fronteira (PVIF), equações (1), (2) e (3), com $f(x)$ representado pela série trigonométrica (4), utilizando o método de Fourier.

Indicação. Siga os passos do método introduzido nas págs 5-10 do livro texto “Análise de Fourier e EDPs” de Djairo G. de Figueiredo.

Exercício 2 Encontre os autovalores e as autofunções correspondentes dos seguintes problemas de valor de fronteira:

1. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = X'(L) = 0$;
2. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(-\pi) = X(\pi)$ e $X'(-\pi) = X'(\pi)$;
3. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = 0$ e $X'(1) + hX(1) = 0$.

Indicação. Represente graficamente a solução da equação transcendental satisfeita pelos autovalores do item 3.