

Primeira Lista (Parte II) de Exercícios de Física Matemática I
(Equação a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Fronteira e Inicial)

IFUSP - Agosto de 2018

Exercício 1 Considere as seguintes equações diferenciais parciais para o movimento, dinâmica ou estática de um sistema físico e cuja solução (formal)¹ é dada por uma séries trigonométrica.

1. O movimento de uma corda elástica de comprimento π , cujas extremidades estão fixas, é regido pela equação

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (1)$$

onde $u = u(t, x)$ denota o deslocamento instantâneo de um ponto x da corda com respeito a posição de repouso e v é a velocidade de propagação da onda, com a condição de fronteira:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

e inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi. \quad (3)$$

(A parte real de)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{ivnt} \sin nx \quad (4)$$

é a solução do problema. Verifique que (4) satisfaz as equações (1), (2) e (3). Qual é a velocidade $u_t(t, x)$ da corda em cada instante t em cada ponto x ? Qual é a (parte real da) velocidade da corda no instante inicial?

2. A temperatura $u = u(r, \theta)$ de equilíbrio em um metal no formato de um disco de raio unitário: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e condutividade $\kappa = 1$ é regida pelas equações

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

e

$$u(1, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Verifique que

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

satisfaz estas equações.

3. O potencial eletrostático $\phi = \phi(x, y)$ em uma região retangular: $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq 1$ é dado pela solução da equação de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

com

$$\phi(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$$

$$\phi(x, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx.$$

Verifique que a seguinte função satisfaz estas equações

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} + B_k \frac{\sinh ky}{\sinh k} \right) \sin kx.$$

¹Isto é, sem rigor matemático em relação a convergência e/ou manipulação das séries em questão. Por exemplo, limites e derivadas podem ser tomados termo a termo, sem preocupação.