

Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Séries de Fourier)

IFUSP - 11 Setembro 2018

Exercício 1 (i) Vamos calcular a série de Fourier da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, dada por $f(x) = \exp(x/2\pi)$ em $x \in (-\pi, \pi)$. Os coeficientes de Fourier de f para $n \neq 0$ são dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x/2\pi - inx} dx \\ &= \frac{1}{1 - 2\pi in} (e^{1/2 - in\pi} - e^{-1/2 + in\pi}) \\ &= \frac{1}{1 - 2\pi in} (e^{1/2}(\cos n\pi - i \sin n\pi) - e^{-1/2}(\cos n\pi + i \sin n\pi)) \\ &= \frac{2 \cos n\pi}{1 - 2\pi in} \sinh 1/2, \end{aligned}$$

pois o seno de um múltiplo de π é zero. Para $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x/2\pi} dx = 2 \sinh 1/2.$$

A série de Fourier Sf de f pode ser escrita, agrupando termos com índices positivos e negativos em uma única soma, como

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\ &= 2 \sinh 1/2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1 - 2\pi in} e^{inx} + \frac{1}{1 + 2\pi in} e^{-inx} \right) \right) \\ &= 2 \sinh 1/2 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4\pi^2 n^2} (\cos nx - 2\pi n \sin nx) \right). \end{aligned} \tag{1}$$

(ii) Para $x = \pi$ a função f é descontínua e, pelo Teorema de Fourier,

$$Sf(\pi) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2},$$

resulta em

$$(e^{1/2} - e^{-1/2}) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4\pi^2 n^2} \cos n\pi \right) = \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{2}$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} &= \frac{1}{4} \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3e^{-1/2} - e^{1/2}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3-e}{e-1} .\end{aligned}$$

(iii) Como $x = 0$ é um ponto de continuidade para f , tomando $x = 0$ em (1), resulta

$$Sf(0) = (e^{1/2} - e^{-1/2}) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} \right) = 1 = f(0)$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{1/2} - e^{-1/2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - e^{1/2} + e^{-1/2}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{1/2} - e + 1}{e - 1} .\end{aligned}$$

Exercício 2 (i) O período fundamental de $f(x) = -|\sin x|$ é o menor $T > 0$ tal que a relação

$$|\sin(x+T)| = |\sin x|$$

é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$. Desenvolvendo o lado esquerdo,

$$|\sin x \cos T + \cos x \sin T| = |\sin x|$$

concluimos que a igualdade se dá se, e somente se,

$$\sin T = 0$$

$$|\cos T| = 1$$

cujas soluções são múltiplos de π . Logo $T = \pi$.

(ii) Sendo $f(x) = -|\sin x|$ uma função π -periódica, a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$, lembrando que $2L = \pi$ e $n\pi/L = 2n$, é dada por

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2inx} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| e^{-2inx} dx \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x e^{-2inx} dx .\end{aligned} \quad (3)$$

Neste ponto acrescento as seguintes observações. Primeiramente, $|\sin x|$ é uma função integrável por Riemann e, sendo positiva, absolutamente integrável. Os coeficientes de Fourier c_n 's estão, conseqüentemente, perfeitamente definidos. Na fórmula dos c_n 's, equação (3), o intervalo de definição foi deslocado de $\pi/2$ por conveniência, de $[-\pi/2, \pi/2]$ para $[0, \pi]$, devido a periodicidade da função esta operação não altera os coeficientes. Finalmente, $|\sin x| = \sin x$ em $[0, \pi]$.

Usando a fórmula de Euler para expressar $\sin x$ como $(e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, temos

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin x e^{-2inx} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^\pi (e^{-i(2n-1)x} - e^{-i(2n+1)x}) dx \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{e^{-i(2n-1)x}}{-i(2n-1)} - \frac{e^{-i(2n+1)x}}{-i(2n+1)} \right) \Big|_0^\pi \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{1 - e^{-i(2n-1)\pi}}{i(2n-1)} - \frac{1 - e^{-i(2n+1)\pi}}{i(2n+1)} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}
\end{aligned} \tag{4}$$

onde na última linha usamos $e^{\pm i\pi} = -1$ e $e^{-2\pi in} = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Substituindo (4) em (2), juntando em uma única soma os coeficientes com índices positivos e negativos, temos

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= \frac{-2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} (e^{2inx} + e^{-2inx}) \\
&= \frac{-2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx .
\end{aligned}$$

(iv) Considere a série de Fourier $\widetilde{Sf}(x)$ de $f(x) = -|\sin x|$ de período 2π

$$\widetilde{Sf}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k e^{ikx} \tag{5}$$

onde, pela fórmula de Euler (veja (3)),

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| (\cos kx - i \sin kx) dx \\
&= \frac{-1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(k-1)x - \sin(k+1)x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{k-1} \cos(k-1)x \Big|_0^{\pi} - \frac{-1}{k+1} \cos(k+1)x \Big|_0^{\pi} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Para $k = 2n$, $\cos(k \pm 1)\pi = \cos(2n \pm 1)\pi = -1$ e para $k = 2n - 1$, $\cos 2n\pi = \cos 2(n-1)\pi = 1$. Os coeficientes $\tilde{c}_k$'s com k ímpar se anulam e somente os coeficientes $\tilde{c}_k$'s com k pares contribuem para a série $\widetilde{Sf}(x)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{2n-1} &= 0 \\
\tilde{c}_{2n} &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}
\end{aligned} \tag{7}$$

Comparando (4) e (7), concluímos

$$\tilde{c}_{2n} = c_n. \tag{8}$$

(v) Note que os coeficientes $a_n = (4/\pi)(4n^2 - 1)^{-1}$ da série de Fourier de $f(x) = -|\sin x|$ em cossenos com $n \geq 1$ são todos de mesmo sinal positivo. Ocorre que $-|\sin x|$ é uma função convexa em $(0, \pi)$ e pela Proposição 1.1 dos Complementos ao curso de Física Matemática (acessível em <http://www.fig.if.usp.br/~marchett/fismat1>, Notas de Aula) se $f(x)$ é convexa em $(0, \pi)$ seus coeficientes pares são todos positivos. Portanto, o sinal dos a_n 's é consistente com este resultado.