

Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Séries de Fourier)

IFUSP - Agosto 2018

Exercício 1 (i) Calcule a série de Fourier que representa a função

$$f(x) = \exp \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\} ,$$

em $-\pi \leq x < \pi$. A série de Fourier $Sf(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x)$, onde

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} , \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

é a série parcial de f em x , de acordo com o Teorema de Fourier,¹ converge para

$$Sf(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} ,$$

onde $f(x \pm 0)$ denota o valor da função $f(y)$ quando y se aproxima de x pela direita (resp. esquerda).

(ii) Calcule a série de Fourier no ponto $x = \pi$ e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} \frac{3 - e}{e - 1} \quad (\simeq 0.040) .$$

(iii) Calcule a série de Fourier no ponto $x = 0$ e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{e} - e + 1}{e - 1} \quad (\simeq -0.020) .$$

Exercício 2 Seja $f(x) = -|\sin x|$ a função periódica definida em $\mathbb{R}$.

(i) Qual é o período fundamental T de f ?

(ii) Calcule os coeficientes c_n , $n \in \mathbb{Z}$, da série de Fourier $Sf(x)$ de f complexa.

(iii) Escreva $Sf(x)$ em termos das funções trigonométricas e coeficientes reais.

(iv) Calcule os coeficientes $\tilde{c}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, da série de Fourier $Sf(x)$ de f no intervalo $0 \leq x < 2T$ e compare com os coeficientes obtidos no item (ii).

(v) A função f tem concavidade definida em $(0, T)$? Se tiver, qual é? Os coeficientes obtidos no item (iii) possuem alguma propriedade peculiar devido a este fato?

¹É preciso assumir certas condições sobre f , satisfeitas neste exemplo.