

Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Séries de Fourier e Problema de Valor Inicial e de Fronteira)

IFUSP - 23 de Setembro 2018

Exercício 1 Considere a equação para a condução do calor em uma barra de comprimento unitário e difusibilidade κ :

$$\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} = 0 \quad (1)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$ sujeita a condição de fronteira (em contato com reservatório à temperatura nula à esquerda, isolante à direita)

$$u(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

e inicial

$$u(0, x) = 1 - (x - 1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

O método de Fourier consiste em procurar soluções das equações homogêneas (1) e (2) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x). \quad (4)$$

Ao substituir (4) na equação (1), esta se reduz, por separação de variáveis, a um par de equações diferenciais ordinárias:

$$T' + \kappa\lambda^2 T = 0 \quad (5)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (6)$$

com $X(0) = X'(1) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

A segunda equação juntamente com a condição de fronteira formam um problema de autovalores: encontrar os valores próprios λ^2 para os quais $-X'' = \lambda^2 X$ com $X(0) = X'(1) = 0$ tem solução $X(x)$ não identicamente nula (autofunções correspondentes). A solução geral de (6) é

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

e sua derivada é

$$X'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x.$$

Aplicando as condições de fronteiras

$$X(0) = A = 0$$

$$X'(1) = \lambda B \cos \lambda = 0$$

encontramos os autovalores (múltiplos ímpares de $\pi/2$) e autofunções do problema:

$$\lambda_n = (n - 1/2)\pi$$

$$X_n(x) = \sin(n - 1/2)\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uma solução da equação (5) é

$$T(t) = e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t, x) = e^{-\kappa(n-1/2)^2\pi^2 t} \sin(n-1/2)\pi x$$

é uma solução de (1) e (2) da forma (4). Pelo princípio de superposição, a solução geral das equações homogêneas (1) e (2) é uma combinação linear de todas estas soluções:¹

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa(n-1/2)^2\pi^2 t} \sin(n-1/2)\pi x \quad (7)$$

onde os b_n devem ser determinados pela condição inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n-1/2)\pi x \sim 1 - (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (8)$$

Observe que o lado direito desta equação deve ser uma função, denominada $f(x)$, ímpar e periódica de período fundamental $T = 4$. A paridade determina $f(x)$ para os valores negativos porém temos também que determinar f no intervalo $(1, 2)$ e, para isso, utilizaremos alguma simetria consistente com a condição de fronteira, refletindo a função em um eixo paralelo ao eixo das ordenadas. Determinamos os coeficientes b_n refletindo f de forma simétrica em relação à $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2-x) \\ &= 1 - (2-x-1)^2 \\ &= 1 - (x-1)^2 = f(x), \quad 1 < x < 2. \end{aligned}$$

Note que é compatível com a condição de fronteira $f'(1) = 0$ e com o período $T = 4$. De fato, esta determinação define uma função f contínua, ímpar e 4-periódica, satisfazendo (8) (veja Fig. 1) e cuja representação em série de Fourier é:

$$Sf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin \frac{k\pi}{2} x \quad (9)$$

Os coeficientes $\tilde{b}_k$ de f devem se anular para $k = 2n$ e ser diferente de zero para $k = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx + \int_1^2 f(2-x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx; \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável

$$y = 2 - x$$

$$dx = -dy$$

¹Pode-se verificar que não há outras soluções não triviais. Veja págs. de 5 à 8 do livro texto “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, de Djairo G. de Figueiredo

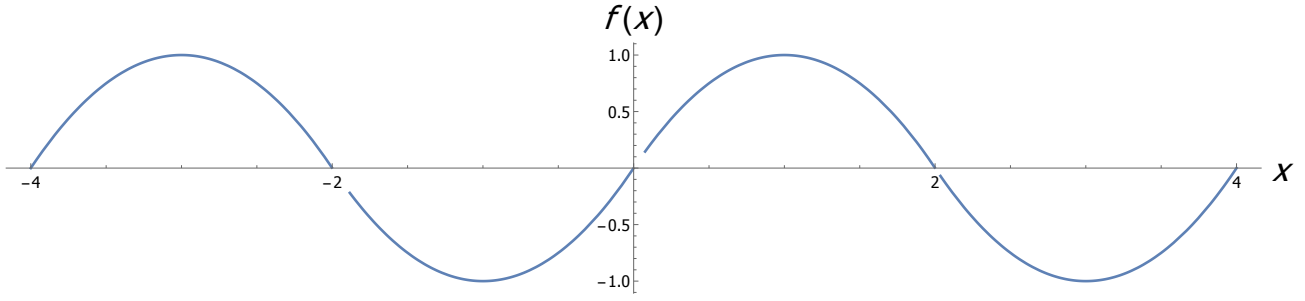


Fig. 1: Função $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ se $0 < x < 1$, 4-periódica, ímpar e simétrica com respeito ao eixo $x = 1$

na segunda integral, juntamente com a identidade

$$\begin{aligned} \sin \frac{k\pi}{2}(2 - y) &= \sin k\pi \cos \frac{k\pi}{2}y - \cos k\pi \sin \frac{k\pi}{2}y \\ &= (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{2}y \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= \int_0^1 f(x) \sin \frac{k\pi}{2}x \, dx - \int_1^0 f(y) \sin \frac{k\pi}{2}(2 - y) \, dy \\ &= \left(1 - (-1)^k\right) \int_0^1 f(x) \sin \frac{k\pi}{2}x \, dx, \end{aligned}$$

de onde se conclui que $\tilde{b}_{2n} = 0$, $\tilde{b}_{2n-1} = b_n$ por comparação de (8) e (9). Por integração por partes,

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 (1 - (x - 1)^2) \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{-4}{(2n - 1)\pi} \left((1 - (x - 1)^2) \cos(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 (x - 1) \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{-8}{(2n - 1)\pi} \int_0^1 (x - 1) \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{-16}{(2n - 1)^2\pi^2} \left((x - 1) \sin(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{-32}{(2n - 1)^3\pi^3} \cos(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{32}{(2n - 1)^3\pi^3}. \end{aligned}$$

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no lado direito de (8) é uma função contínua e seccionalmente diferenciável. Consequentemente, sua série de Fourier $S_n f(x)$ converge uniformemente para f pelo teste M de Weierstrass (b_n é somável em valor absoluto) e teorema de Fourier. Isso implica que a solução

(7) é uniformemente convergente em $\bar{R}$ e, por consequente, contínua devido a continuidade de cada função $u_n(t, x)$ em $\bar{R}$.

Exercício 2 1. Vamos calcular a série de Fourier $Sh(x)$ da função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = (1 - x/\pi)/2$ em $(0, \pi)$, ímpar e 2π -periódica. Os coeficientes de Fourier ímpares de h são

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin nx dx \\ &= \frac{-1}{\pi n} \left(\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

para $n \geq 1$, por integração por partes, e a série de Fourier de h é, portanto,

$$\begin{aligned} Sh(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx . \end{aligned}$$

Como $h(x)$ é seccionalmente diferenciável, o Teorema de Fourier estabelece a igualdade

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx , \quad x \in (0, \pi) \quad (10)$$

(como $h(x) = (1 - x/\pi)/2$ em $(0, 2\pi)$, a igualdade (10) é, de fato, válida até 2π).

2. Integrando a igualdade termo a termo, temos

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos nx) = SH(x) . \end{aligned} \quad (11)$$

$H(x)$ em $(0, \pi)$ é uma função par e 2π -periódica. A igualdade $H(x) = SH(x)$ segue do Teorema sobre integração de séries de Fourier, aplicável às funções seccionalmente contínuas, pelo qual temos ainda que

$$SH(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx , \quad (12)$$

com $A_n = -1/(\pi n^2)$ e

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12\pi} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} . \end{aligned}$$

Concluimos pela comparação de (11) e (12) que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

é

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \left(-H(x) + \frac{A_0}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{1}{4}(x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{em } (0, \pi) \end{aligned} \tag{13}$$

par e 2π -periódica (veja Fig. 2).

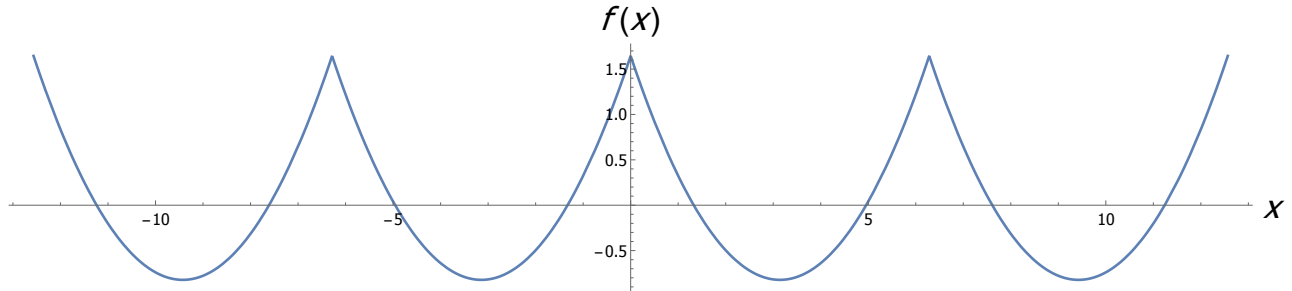


Fig. 2: Função $f(x) = \frac{1}{4}(x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ se $0 < x < \pi$, 2π -periódica e par

3. Fazendo $x = 0$ em (13), obtemos a relação

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

descoberta por Euler.

4. Aplicando o Teorema sobre integração de séries de Fourier, temos

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^x \left(H(y) - \frac{A_0}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x \left(-\frac{y^2}{2\pi} + y - \frac{\pi}{3} \right) dy \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{6\pi} - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx .
\end{aligned}$$

Integrando esta série termo a termo mais uma vez, obtemos a função

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{y^3}{6\pi} - \frac{y^2}{2} + \frac{\pi y}{3} \right) dy \\
&= -\frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{12\pi} - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (\cos nx - 1) = SF(x)
\end{aligned} \tag{14}$$

em $[0, \pi)$, par e 2π -periódica. Consequentemente,

$$SF(x) = \frac{\tilde{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos nx \tag{15}$$

com $\tilde{A}_n = 1/(\pi n^4)$, $n \geq 1$, e

$$\tilde{A}_0 = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x^4}{12\pi} - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{3} \right) dx = \frac{-\pi^3}{2} \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right) = \frac{-\pi^3}{45} .$$

Comparando (15) e (14), temos

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{12\pi} - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{3} \right) = \frac{-\pi^3}{90} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos nx$$

de onde se conclui, fazendo $x = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

5. Aplicando a identidade de Parseval para a função f em (13), temos

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right)^2 dx \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x^4}{4} - \pi x^3 + \frac{4\pi^2 x^2}{3} - \frac{2\pi^3 x}{3} + \frac{\pi^4}{9} \right) dx \\&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^5}{20} - \frac{\pi x^4}{4} + \frac{4\pi^2 x^3}{9} - \frac{\pi^3 x^2}{3} + \frac{\pi^4 x}{9} \right]_0^\pi \\&= \frac{\pi^4}{2} \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} \right) \\&= \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

verificando a relação obtida no item 4..