

Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - Setembro 2018

Exercício 1 *Determine a solução do seguinte problema de valores inicial e de fronteira pelo método de Fourier:*

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0,$$

no interior do domínio $\bar{R} = \{(t, x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$, com condições de fronteira

$$u(t, 0) = u_x(t, 1) = 0,$$

para $t > 0$ e condição inicial

$$u(0, x) = 1 - (x - 1)^2,$$

para $0 \leq x \leq 1$.

Indicação: Para determinar os coeficientes da solução em série, obtida pelo método de Fourier, escreva a série de Fourier em senos da função $1 - (x - 1)^2$ em $0 \leq x \leq 2$ periódica de período fundamental $T = 4$. Explique esta escolha para representar o dado inicial do problema.

Exercício 2 1. A série de Fourier

$$Sh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

2π -periódica e ímpar, representa a função $h(x) = (1 - x/\pi)/2$ no intervalo $(0, \pi)$. Calcule os coeficientes da série de Fourier de $h(x)$.

2. Integre os dois membros da igualdade acima e obtenha uma função $f(x)$ em $(0, \pi)$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Você pode justificar a validade da integração termo a termo?

3. Faça $x = 0$ e demonstre a igualdade descoberta por Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Utilize o teorema sobre integração de séries de Fourier por mais duas vezes e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. Verifique este resultado por intermédio da identidade de Parseval aplicada à função $f(x)$ no item 2.