

Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a derivadas parciais não-homogêneas e séries de Fourier)

IFUSP - Outubro 2018

Exercício 1 *Considere o seguinte PVIF*

$$u_t - u_{xx} + k^2 u = 0, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u_x(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(t, \pi) = 1, \quad t > 0 \quad (2)$$

e condição inicial

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

O primeiro passo para resolução do PVFI é transformá-lo em outro PVIF com a condição de contorno homogênea. Escrevemos

$$u(t, x) = U(x) + w(t, x) \quad (4)$$

onde $U(x)$ é a solução independente do tempo (temperatura de equilíbrio) das equações (1) e (2):

$$-U'' + k^2 U = 0, \quad 0 < x < \pi$$

$$U'(0) = 0$$

$$U'(\pi) = 1 \quad (5)$$

cuja solução, impondo as condições de fronteira à solução geral:

$$U(x) = A \cosh kx + B \sinh kx$$

com

$$U'(x) = k(A \sinh kx + B \cosh kx)$$

$$U'(0) = kB = 0$$

$$U'(\pi) = kA \sinh k\pi = 1$$

é

$$U(x) = \frac{\cosh kx}{k \sinh k\pi}. \quad (6)$$

Substituindo (4), (5) e (6) em (1), (2) e (3), resulta da linearidade das equações o seguinte PVIF para w

$$w_t - w_{xx} + k^2 w = 0, \quad (7)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = 0, \quad t > 0 \quad (8)$$

e condição inicial

$$w(0, x) = -\frac{\cosh kx}{k \sinh k\pi}, \quad 0 \leq x < \pi. \quad (9)$$

Note para equação (7)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + k^2 u &= -U'' + k^2 U + w_t - w_{xx} + k^2 w \\ &= w_t - w_{xx} + k^2 w = 0 \end{aligned}$$

e as demais equações seguem analogamente.

O PVIF (7), (8) e (9) pode ser resolvido pelo método de Fourier. Substituindo

$$w(t, x) = T(t)X(x)$$

em (7) e (8), resulta da separação de variáveis um par de equações ordinárias

$$\begin{aligned} T' + (\lambda^2 + k^2)T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. A segunda equação e condições de fronteira é um problema de autovalores, já resolvido anteriormente:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n \\ X_n(x) &= \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

são os autovalores e autofunções correspondentes. A primeira equação tem solução $T(t)$ proporcional a $\exp(-(\lambda^2 + k^2)t)$. Portanto, como cada uma das soluções na forma produto resolve as equações (7) e (8) homogêneas, a solução do PVIF para w é uma combinação linear

$$w(t, x) = \frac{a_0}{2} e^{-k^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n^2 + k^2)t} \cos nx \quad (10)$$

onde os a_n 's são coeficientes de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica par tal que $f(x) = -\cosh kx / (k \sinh k\pi)$ em $[0, \pi]$,

$$a_0 = \frac{-2}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^\pi \cosh kx \, dx = \frac{-2}{k^2 \pi}$$

e, para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{-2}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^\pi \cosh kx \cos nx \, dx.$$

Escrevendo, com o auxílio da fórmula de Euler, o integrando como

$$\cosh kx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(n + ik)x + \cos(n - ik)x),$$

resulta a integral

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^\pi (\cos(n+ik)x + \cos(n-ik)x) dx \\
&= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \left(\frac{1}{n+ik} \sin(n+ik)\pi + \frac{1}{n-ik} \sin(n-ik)\pi \right) \\
&= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \left(\frac{1}{n+ik} - \frac{1}{n-ik} \right) i \sinh k\pi \cos n\pi \\
&= \frac{-2}{\pi} \frac{1}{n^2 + k^2} \cos n\pi
\end{aligned} \tag{11}$$

onde na terceira linha usamos $\sin n\pi = 0$ e $\sin ik\pi = i \sinh k\pi$. Substituindo (6), (10) e (11) em (4), concluímos

$$u(t, x) = \frac{\cosh kx}{k \sinh k\pi} - \frac{1}{\pi} e^{-k^2 t} \left(\frac{1}{k^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + k^2} e^{-n^2 t} \cos nx \right).$$

Note que $w(t, x)$ é o transiente da solução: $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, x) - U(x)) = 0$ e $U(x)$ é a temperatura de equilíbrio.

Exercício 2 Considere o problema de valores inicial e de fronteira (PVI)F

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = e^{-t}, \tag{12}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$ com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0 \tag{13}$$

e

$$u(0, x) = \frac{x}{2} (\pi - x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{14}$$

Pelo método da variação dos parâmetros, a solução o PVI)F tem a forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx. \tag{15}$$

Observe que u dado por (15), onde $c_n(t) = b_n \exp(-n^2 \kappa t)$ é solução do PVI)F (12) com e^{-t} substituído por 0, (13) e (14) com

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{16}$$

o n -ésimo coeficientes de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, ímpar tal que $f(x) = x(\pi - x)/2$ para $x \in [0, \pi]$. A função f é contínua e sua derivada f' é quadrado integrável de forma que sua série de Fourier $Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ converge uniformemente para f .

Substituindo (15) em (12), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa} c'_n(t) + n^2 c_n(t) \right) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin nx \tag{17}$$

onde os g_n 's são coeficientes de Fourier da função $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica na variável x , ímpar tal que $g(t, x) = e^{-t}$ para $t > 0$ e $x \in (0, \pi)$. Escrevendo

$$g_n(t) = e^{-t} \bar{g}_n ,$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{g}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 4/(\pi n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de funções L.I., a igualdade (17) se dá termo-a-termo

$$\frac{1}{\kappa} c'_n(t) + n^2 c_n(t) = e^{-t} \bar{g}_n .$$

A solução desta equação, dado que

$$\left(\frac{1}{\kappa} c'_n(t) + n^2 c_n(t) \right) e^{\kappa n^2 t} = \frac{1}{\kappa} \left(c_n(t) e^{n^2 \kappa t} \right)' = e^{(n^2 \kappa - 1)t} \bar{g}_n$$

é por integração

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0) e^{-n^2 \kappa t} + \kappa \bar{g}_n \int_0^t e^{-n^2 \kappa(t-s)} e^{-s} \, ds \\ &= b_n e^{-n^2 \kappa t} + \kappa \bar{g}_n e^{-n^2 \kappa t} \int_0^t e^{(n^2 \kappa - 1)s} \, ds \\ &= b_n e^{-n^2 \kappa t} + \frac{\kappa \bar{g}_n}{n^2 \kappa - 1} \left(e^{-t} - e^{-n^2 \kappa t} \right) . \end{aligned}$$

Para escrever a solução do PIVF (12), (13) e (14), resta ainda calcular os coeficientes b_n 's dados pela integral (16):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-2}{\pi n} \left(\frac{x}{2} (\pi - x) \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \left((\pi - 2x) \sin nx \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi n^3} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 4/(\pi n^3) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

A solução do PVIF é, portanto,

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^3} \left(e^{-n^2\kappa t} + \frac{n^2\kappa}{n^2\kappa - 1} \left(e^{-t} - e^{-n^2\kappa t} \right) \right) \sin nx . \quad (18)$$

Devido as descontinuidades da função $g(t, x)$ nas extremidades $x = 0$ e $x = \pi$, a convergência da série de Fourier da segunda derivada de u com respeito à x não é uniforme em $[0, \pi]$ e, conseqüentemente, a troca de ordem das derivadas com o somatório não é garantida. Lembre que a garantia de que as derivadas de u podem ser obtidas derivando termo-a-termo a série requer convergência uniforme em $[0, \pi]$, que não temos quando derivamos duas vezes com respeito a x , termo-a-termo, a parte $(2e^{-t}/\pi) \sum_{n \geq 1} ((1 - \cos n\pi)/n^3)(n^2\kappa/(n^2\kappa - 1)) \sin nx$ da solução.