

Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais Não-Homogêneas e Séries de Fourier)

IFUSP - 22 Setembro 2018

Exercício 1 Mostre que a solução do seguinte PIVF

$$u_t - u_{xx} + k^2 u = 0, \quad k \neq 0 \text{ real},$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u_x(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(t, \pi) = 1, \quad t > 0$$

e condição inicial

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

é dada por

$$u(t, x) = \frac{\cosh kx}{k \sinh k\pi} - \frac{1}{\pi} e^{-k^2 t} \left(\frac{1}{k^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + k^2} e^{-n^2 t} \cos nx \right).$$

Fisicamente, o termo adicional $-k^2 u(t, x)$ à equação consome ou fornece energia à barra? Explique seu papel na distribuição da temperatura de equilíbrio (quando $t \rightarrow \infty$).

Exercício 2 Uma fonte externa fornece calor a uma taxa e^{-t} uniformemente ao longo de uma barra condutora de extensão π , cuja temperatura inicial é $x(\pi - x)/2$ e em cujas secções transversais $x = 0$ e $x = \pi$ a temperatura é mantida igual a zero. Nestas condições, o problema de valores inicial e de fronteira (PIVF) é dado por

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = e^{-t},$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \frac{x}{2} (\pi - x)$$

para $0 \leq x \leq \pi$. Resolva o PIVF.