

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções
(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)
IFUSP - 31 Outubro 2018

Exercício 1 (Corda percutida por martelo convexo) *Considere o seguinte PIVF:*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com condição de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad (2)$$

para $t > 0$, e iniciais $u(0, x) = f(x) = 0, 0 \leq x \leq \pi$ e

$$u_t(0, x) = g(x) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi}{2\delta}(x - a) & \text{se } |x - a| \leq \delta \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < a - \delta \text{ e } a + \delta < x \leq \pi \end{cases}, \quad (3)$$

onde a e δ são reais positivos tais que $\delta < a < \pi - \delta$. A solução do PIVF, equações (1), (2) e (3), pelo método de Fourier tem a forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx \quad (4)$$

onde

$$c_n(t) = b_n \cos nvt + d_n \sin nvt \quad (5)$$

e, devido as condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = f(x) \\ u_t(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{c}_n(0) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} nvd_n \sin nx = g(x), \end{aligned}$$

temos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2A}{\pi} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta}(x - a) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7)$$

são coeficientes de Fourier das funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódicas, ímpares e tais que em $[0, \pi]$, $f(x)$ é identicamente nula e $g(x)$ é dada por (3). Fazendo a mudança de variável $y = x - a$ em (7) para centrar a integral em $x = a$, juntamente com

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
nvd_n &= \frac{2A}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} y \sin n(y+a) dy \\
&= \frac{2A}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} y (\sin ny \cos na + \cos ny \sin na) dy \\
&= \frac{4A}{\pi} \sin na \int_0^{\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} y \cos ny dy \\
&= \frac{2A}{\pi} \sin na \int_0^{\delta} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2\delta} + n \right) y + \cos \left(\frac{\pi}{2\delta} - n \right) y \right) dy
\end{aligned}$$

com a integral $\int_{-\delta}^{\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} y \sin ny dx$ na segunda igualdade sendo nula devido a paridade ímpar do integrando. Integrando a expressão resultante, tendo em vista que

$$\sin(\pi/2 \pm n\delta) = \cos n\delta,$$

obtemos na sequência

$$\begin{aligned}
nvd_n &= \frac{2A}{\pi} \sin na \left(\frac{1}{\pi/2\delta + n} \sin(\pi/2 + n\delta) + \frac{1}{\pi/2\delta - n} \sin(\pi/2 - n\delta) \right) \\
&= \frac{2A}{\pi} \sin na \left(\frac{1}{\pi/2\delta + n} + \frac{1}{\pi/2\delta - n} \right) \cos n\delta \\
&= \frac{2A}{\pi} \frac{\pi/\delta}{\pi^2/(2\delta)^2 - n^2} \sin na \cos n\delta \\
&= \frac{8\delta A}{\pi^2 - 4\delta^2 n^2} \sin na \cos n\delta
\end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com (4), (5) e (6), o resultado desejado:

$$u(t, x) = \frac{8\delta A}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 - 4\delta^2 n^2} \frac{\sin na \cos n\delta}{n} \sin nx \sin nvt. \quad (8)$$

Observe que a função g é contínua e sua série de Fourier $Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi v/L) d_n \sin nx$ converge uniformemente para g em $[0, \pi]$ pelo teste M de Weierstrass. A série de $u(t, x)$ converge uniformemente em $\bar{R}$ para uma função da classe C^1 que, por sua vez, é solução do PVIF no sentido generalizado – uma solução $u(t, x)$ de (1), (2) e (3) no sentido estrito (veja Teorema 5.1, pág. 137 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo) requer que g' seja contínua e g'' seccionalmente contínua em $[0, \pi]$.

As seguintes animações da solução analítica (8), truncada nos primeiros N termos, e da solução numérica do PVIF, foram gentilmente disponibilizadas por Leonardo Almeida Lessa:

Solução analítica com $N = 2$ termos

Solução analítica com $N = 5$ termos

Solução analítica com $N = 10$ termos

Solução analítica com $N = 20$ termos

Solução numérica do PVIF

Como visto recentemente em aula, a fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy$$

é solução do PVIF, equações (1), (2) e (3), contanto que os dados iniciais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sejam funções 2π -periódicas, ímpares e tais que em $[0, \pi]$ coincidam com as funções definidas em (3). O método de Fourier já havia solicitado a extensão dos dados iniciais para a reta. Assumindo que a solução de (1), (2) e (3) seja única (pela conservação de energia) e como $f \equiv 0$, a solução do PVIF é

$$u(t, x) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy$$

com g dada por (3).

Tentem explicar por intermédio desta fórmula (com g uma função 2π -periódica e ímpar) o comportamento exótico das animações acima. Note, em particular, o formato achatado (segundo seu colega Leonardo "a onda fica chapada boa parte do tempo") e o atraso em reverter o sinal do deslocamento da corda (o sinal é invertido bem depois da onda ter atingido a fronteira no menor t tal que $[a - \delta - vt, a + \delta + vt] \cap \{0, \pi\} \neq \emptyset$). Note que, pela fórmula de D'Alembert e pela equação (8), $u(t, x) \equiv 0$ nos múltiplos inteiros de π/v (por que?).

Exercício 2 *Para obter a equação da energia do PVIF:*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} + ku = 0, \quad (9)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) - \alpha u(t, 0) = u_x(t, L) + \beta u(t, L) = 0, \quad t > 0 \quad (10)$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (11)$$

com $\alpha, \beta \geq 0$, procedemos da seguinte maneira.

Recordando que $v^2 = \tau/\rho$, onde ρ e τ , a densidade (linear) e a tensão da corda em repouso, se mantém constante durante o movimento, vamos assumir que u é uma solução no sentido estrito do PVIF. Sendo u da classe C^1 em $\bar{R}$ e da classe C^2 em R , satisfazendo o PVIF, a equação (9) multiplicada por τu_t pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k \tau u u_t \\ &= \rho u_{tt} u_t + \tau u_{xt} u_x + k \tau u u_t - \tau (u_{xt} u_x + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_{tx} + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \end{aligned}$$

a qual, ao integrar em x sobre o intervalo $[0, L]$, resulta

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L (\rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k \tau u u_t) dx \\
&= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t + \frac{k\tau}{2} (u^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k \tau u^2)_t dx - \tau u_x u_t \Big|_0^L
\end{aligned} \tag{12}$$

bastando para isso aplicar o teorema fundamental do cálculo ao último termo. Sendo o integrando da expressão acima uma função contínua em R e integrável em $[0, L]$, a derivada com respeito a t pode ser tomada fora da integral. Usando (10), o termo de fronteira pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
-\tau u_x u_t \Big|_0^L &= \tau (u_x(t, 0) u_t(t, 0) - u_x(t, L) u_t(t, L)) \\
&= \tau (\alpha u(t, 0) u_t(t, 0) + \beta u(t, L) u_t(t, L)) \\
&= \frac{\tau}{2} (\alpha u(t, 0)^2 + \beta u(t, L)^2)_t .
\end{aligned} \tag{13}$$

As equações (12) e (13) juntas resultam em

$$\frac{d\tilde{E}}{dt}(t) = 0$$

onde

$$\tilde{E}(t) = E(t) + \frac{\tau}{2} (\alpha u(t, 0)^2 + \beta u(t, L)^2) . \tag{14}$$

A energia da corda

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k \tau u^2) dx \tag{15}$$

não é uma quantidade conservada pelo movimento devido a condição de fronteira (10). A quantidade $\tilde{E}(t)$, que se conserva pelo movimento, pode ser escrita em termos dos dados iniciais (11) do problema:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g(x)^2 + \tau f'(x)^2 + k \tau f(x)^2) dx + \frac{\tau}{2} (\alpha f(0)^2 + \beta f(L)^2) . \tag{16}$$

Admitindo a existência de uma solução $u(t, x)$ do PVIF no sentido estrito, vamos provar que ela é única. Supondo que haja duas possíveis soluções do PVIF $u^1(t, x)$ e $u^2(t, x)$, a diferença

$$w(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x)$$

satisfaz o PVIF (9), (10) com (11) substituído pelo dado inicial trivial:

$$\frac{1}{v^2} w_{tt} - w_{xx} + k w = 0 ,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$,

$$w_x(t, 0) - \alpha w(t, 0) = w_x(t, L) + \beta w(t, L) = 0 , \quad t > 0$$

e

$$w(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad w_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L .$$

A quantidade $\tilde{E}(t)$ deste problema, devido sua conservação e a (16), satisfaz

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$$

de onde se conclui, tendo em vista (15) e (14),

$$\frac{1}{2} \int_0^L (\rho w_t^2 + \tau w_x^2 + k\tau w^2) dx + \frac{\tau}{2} (\alpha w(t, 0)^2 + \beta w(t, L)^2) = 0 .$$

Devido a continuidade e positividade do integrando em R e positividade do termo de fronteira,

$$w_t(t, x) = w_x(t, x) = w(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L$$

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0, \quad t > 0$$

ou, equivalentemente,

$$w(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L .$$

De onde se conclui, devido a continuidade de $w(t, x)$ em $\bar{R}$, a contradição:

$$w(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x) = 0, \quad \text{em } \bar{R},$$

a saber, caso exista, $u(t, x)$ é a única solução do PVIF definido pelas equações (9), (10) e (11).

As condições de fronteira do tipo (10) são atribuídas por Djairo, pág 134, ao final da Sec. 5.1, de “Análise de Fourier e EDP”, a uma conexão elástica às extremidades da corda. De fato, os termos adicionais à equação de energia da corda proporcionais a u^2 , tanto a integral de $k\tau u^2/2$ quanto os termos de fronteira, são da forma de uma energia potencial elástica.