

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)

IFUSP - Outubro 2018

Exercício 1 (Corda percutida por martelo convexo) Considere uma corda elástica percutida por um martelo convexo de largura 2δ cujo problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) é dado por:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ e}$$

$$u_t(0, x) = \begin{cases} A \cos(\pi(x-a)/2\delta) & \text{se } |x-a| \leq \delta \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < a-\delta \text{ e } a+\delta < x \leq \pi \end{cases}$$

onde a e δ são constantes positivas apropriadas e A um real arbitrário. Utilize o método de Fourier para determinar a solução do PVIF, dada por

$$u(t, x) = \frac{8\delta A}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 - 4\delta^2 n^2} \frac{\sin na \cos n\delta}{n} \sin nx \sin nvt.$$

Indicação: O cálculo dos coeficientes de Fourier é facilitado se a integral de Fourier for centrada, por uma mudança de variável, no ponto $x = a$.

Exercício 2 Obtenha a equação da energia para o PVIF:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = -ku,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) - \alpha u(t, 0) = u_x(t, L) + \beta u(t, L) = 0, \quad t > 0$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

com α , β e k constantes positivas. Demonstre a seguir que a solução deste problema, admitindo sua existência, é única. Você seria capaz de interpretar esta condição de fronteira do ponto de vista Físico?

Indicação: Encontre a função $\tilde{E}(t) = E(t) + \tau\alpha u(t, 0)^2/2 + \tau\beta u(t, L)^2/2$, onde $E(t)$ é a função energia da corda vibrante, que se conserva no tempo e utilize a conservação de $\tilde{E}(t)$ para demonstrar a unicidade do PVIF.