

Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Fórmula de D'Alembert e Oscilações Forçadas)

IFUSP - 8 de Novembro 2018

Exercício 1 (Corda semi-infinita) Considere o seguinte PVI:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

em $R = \{t > 0, x > 0\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t, 0) = e^{-t}, \quad t > 0, \quad (2)$$

e iniciais

$$u(0, x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = \sin x, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Dividimos o problema em duas partes: **(I)** Para $(t, x) \in R$ tal que $x - vt \geq 0$, empregamos a fórmula de D'Alembert usual,

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy$$

com $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = \sin x$, que resulta em

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} (e^{-(x+vt)} + e^{-(x-vt)}) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \sin y dy \\ &= \frac{1}{2} (e^{-(x+vt)} + e^{-(x-vt)}) - \frac{1}{2v} (\cos(x + vt) - \cos(x - vt)) \\ &= e^{-x} \cosh vt + \frac{1}{v} \sin x \sin vt. \end{aligned} \quad (4)$$

Note que, devido a causalidade, o intervalo de dependência $[x - vt, x + vt]$ do ponto (t, x) está contido no semi-eixo $[0, \infty)$, sobre o qual a corda se estende quando em repouso, e a solução $u(t, x)$ para os pontos (t, x) tais que $x - vt \geq 0$ não difere da solução do PVI de uma corda infinita.

(II) Para $(t, x) \in R$ tal que $x - vt \leq 0$, devemos retornar à solução geral da equação (1):

$$u(t, x) = F(x + vt) + G(x - vt) \quad (5)$$

onde F e G , devido as condições iniciais (3),

$$F(x) + G(x) = e^{-x},$$

$$v(F'(x) - G'(x)) = \sin x, \quad x \geq 0$$

são dados por

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2v} \cos x + K \quad (6)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2v} \cos x - K, \quad x \geq 0$$

com K uma constante de integração arbitrária.

Note que o argumento da função G em (5) é negativo restando ainda, neste caso, determinar a função $G(x)$ para $x < 0$. Para isso, impondo em (5) a condição de fronteira (2):

$$F(vt) + G(-vt) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

juntamente com (6), resulta

$$\begin{aligned} G(-y) &= e^{-y/v} - F(y) \\ &= e^{-y/v} - \frac{1}{2}e^{-y} + \frac{1}{2v} \cos y - K, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (5), obtemos a solução

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F(x + vt) + G(-(vt - x)) \\ &= e^{-(t-x/v)} + \frac{1}{2} (e^{-(x+vt)} - e^{-(vt-x)}) - \frac{1}{2v} (\cos(x + vt) - \cos(vt - x)) \\ &= e^{-(t-x/v)} - e^{-vt} \sinh x + \frac{1}{v} \sin vt \sin x \end{aligned} \quad (8)$$

para $x - vt < 0$.

Comentário sobre a solução (4) e (8): O colega Leonardo Almeida Lessa alertou-me sobre uma inconsistência no problema formulado pelas equações (1)-(3). Mais precisamente, a segunda condição inicial em (3) para a velocidade da corda no ponto $x = 0$ é 0 enquanto que a derivada em t da condição de fronteira (2) no ponto $x = 0$ e instante $t = 0$ é -1 . Embora a solução (4) e (8) para o desvio da corda semi-infinita com respeito ao repouso seja contínua, este deslocamento tem um ponto que se desloca com velocidade v cujas derivadas a direita e à esquerda diferem por uma unidade. O Leonardo mais uma vez forneceu-nos, gentilmente, animações da solução do problema (1)-(3) e de sua velocidade:

Solução $u(t, x)$, para $v = 1$ e $t \in [0, 2\pi]$

Velocidade $u_t(t, x)$, para $v = 1$ e $t \in [0, 2\pi]$

Exercício 2 (Oscilações forçadas) Considere o problema:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = A \cos 2\pi\omega t, \quad (9)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0 \quad (10)$$

onde A , v e ω são reais positivos.

Vamos mostrar que, exceto para certos valores especiais $\{\omega_n\}$ de ω , o problema acima tem solução da forma $p(x) \cos 2\pi\omega t$. Substituindo a forma da solução

$$u = p \cos 2\pi\omega t$$

juntamente com as segundas derivadas

$$u_{tt} = -4\pi^2\omega^2 p \cos 2\pi\omega t$$

$$u_{xx} = p'' \cos 2\pi\omega t$$

em (9), temos

$$-p'' - \frac{4\pi^2}{v^2}\omega^2 p = A, \quad 0 < x < L \quad (11)$$

Devido a condição de fronteira (10), procuramos uma solução de (11) na forma de uma série de Fourier em senos:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (12)$$

Para isso, representamos o termo não-homogêneo de (11) em uma série de Fourier em senos (de mesmo período $2L$):

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 < x < L \quad (13)$$

onde

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{2A}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) . \end{aligned}$$

Substituindo (12) e (13) em (11), usando a independência linear das funções $\left\{ \sin \frac{n\pi}{L} x, n \in \mathbb{N} \right\}$, obtemos

$$\frac{4\pi^2}{v^2} (\omega_n^2 - \omega^2) c_n = h_n$$

de onde se conclui: se

$$\omega \neq \omega_n := \frac{nv}{2L} \quad (14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe uma solução $p(x)$ de (11) da forma (12) com

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{v^2}{4\pi^2} \frac{h_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \\ &= \frac{Av^2}{2n\pi^3} \frac{1 - \cos n\pi}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Determinamos agora a solução $u(t, x)$ do problema (9) e (10) tal que satisfaz

$$u(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (16)$$

A solução geral do problema (9) e (10) é

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_{\text{hom}}(t, x) + p(x) \cos 2\pi\omega t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin 2\pi\omega_n t + d_n \cos 2\pi\omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2\pi\omega t \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned} \quad (17)$$

com b_n e d_n a serem determinados pelas equações

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n + c_n) \sin \frac{n\pi}{L} x = 0$$

$$u_t(0, x) = 2\pi\omega_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 .$$

Pela independência linear das funções $\sin \frac{n\pi}{L} x$, obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ d_n &= -c_n , \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned} \tag{18}$$

A solução do problema PIVF, equações (9) e (10) e (16), no caso não-ressonante (14) é dada por (17), (15) e (18):

$$u(t, x) = \frac{Av^2}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \frac{\cos 2\pi\omega t - \cos 2\pi\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi}{L} x . \tag{19}$$

Quando $\omega = \omega_n$ para algum n , aplicamos L'Hopital à solução $u(t, x)$ com $\omega \neq \omega_n$, no limite $\omega \rightarrow \omega_n$. Suponha $\omega = \omega_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, aplicando L'Hopital ao termo $n = n_0$ da solução (19)

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{\cos 2\pi\omega t - \cos 2\pi\omega_{n_0} t}{\omega_{n_0}^2 - \omega^2} &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{(\cos 2\pi\omega t - \cos 2\pi\omega_{n_0} t)'}{(\omega_{n_0}^2 - \omega^2)'} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{\pi t \sin 2\pi\omega t}{\omega} , \end{aligned}$$

onde $'$ denota a derivada com respeito a ω , obtemos uma solução

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{Av^2}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1, n \neq n_0} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \frac{\cos 2\pi\omega t - \cos 2\pi\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &\quad + \frac{Av^2}{2\pi^2} \frac{1 - \cos n_0\pi}{n_0} \frac{t \sin 2\pi\omega_{n_0} t}{\omega_{n_0}} \sin \frac{n_0\pi}{L} x \end{aligned}$$

cujo modo de vibração correspondente à frequência $\omega_{n_0} = \frac{n_0 v}{2L}$ é amplificado por t , devido a ressonância. Note que $1 - \cos n_0\pi$ se anula quando n_0 é par e somente os modos ímpares podem ser ressonantes.