

Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Plancherel)

IFUSP - Novembro 2018

Exercício 1 *Calcularemos a transformada de Fourier*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

de $f(x)$ das seguintes funções:

1. Se $f(x) = 1 - |x|$ se $|x| \leq 1$ e $f(x) = 0$ se $|x| > 1$, então

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^0 (1 + x) e^{-i\xi x} dx + \int_0^1 (1 - x) e^{-i\xi x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^1 (1 - x) e^{i\xi x} dx + \int_0^1 (1 - x) e^{-i\xi x} dx \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (I(\xi) + I(-\xi)) .\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}I(\xi) &= \int_0^1 (1 - x) e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{i\xi} \left((1 - x)|_0^1 + \int_0^1 e^{i\xi x} dx \right) \\ &= \frac{-1}{i\xi} + \frac{1}{\xi^2} (1 - e^{i\xi})\end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\xi^2} (1 - e^{i\xi}) + \frac{1}{\xi^2} (1 - e^{-i\xi}) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos^2 \xi/2 + \sin^2 \xi/2}{\xi^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 \xi/2}{(\xi/2)^2} .\end{aligned}$$

2. Seja $f(x) = \cos kx$ para $|x| \leq N\pi/k$ e $f(x) = 0$ para $|x| > N\pi/k$, onde N e k são inteiros positivos. Como $f(x)$ é diferente de 0 somente no intervalo $[-N\pi/k, N\pi/k]$, f é integrável no sentido impróprio,

$$\lim_{K, M \rightarrow \infty} \int_{-K}^M f(x) dx = \int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} f(x) dx$$

e absolutamente integrável, pela mesma razão. Sendo $f \in \mathcal{L}^1$, a transformada de Fourier $\hat{f}$ de f está bem definida e é dada por

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi-k)x} dx + \int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi+k)x} dx \right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\xi-k} (e^{-i(\xi-k)N\pi/k} - e^{i(\xi-k)N\pi/k}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi+k} (e^{-i(\xi+k)N\pi/k} - e^{i(\xi+k)N\pi/k}) \right) \\ &= \frac{i(-1)^N}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi}{\xi^2 - k^2} (e^{-i\xi N\pi/k} - e^{i\xi N\pi/k}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^N \frac{\xi}{\xi^2 - k^2} \sin \frac{N\pi}{k} \xi, \end{aligned} \tag{1}$$

onde a terceira igualdade segue de

$$e^{\pm iN\pi} = \cos N\pi \pm i \sin N\pi = (-1)^N.$$

Por um resultado geral (veja págs. 198-199 do livro “Análise de Fourier e EDP’s”, de Djairo G. de Figueiredo ou Teorema 4.4 de “Complementos ao Curso de Física-Matemática I”, pág. 38), sendo f da classe $\mathcal{L}^1$, $\hat{f}(\xi)$ deve ser uma função uniformemente contínua e limitada. De fato, a continuidade de $\hat{f}(\xi)$ dada por (1) é devido ao produto de duas funções contínuas, $\xi/(\xi^2 - k^2)$ e $\sin N\pi\xi/k$, para $\xi \neq \pm k$, ser contínua. O limite deste produto quando ξ tende para $\pm k$, por L’Hopital,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm k} \frac{\xi}{\xi^2 - k^2} \sin \frac{N\pi}{k} \xi &= \lim_{\xi \rightarrow \pm k} \frac{1}{(\xi^2 - k^2)'} \left(\xi \sin \frac{N\pi}{k} \xi \right)' \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \pm k} \frac{1}{2\xi} \left(\sin \frac{N\pi}{k} \xi + \frac{N\pi}{k} \xi \cos \frac{N\pi}{k} \xi \right) \\ &= \frac{1}{\pm 2k} (\sin(\pm N\pi) \pm N\pi \cos(\pm N\pi)) \\ &= (-1)^N \frac{N\pi}{2k} \end{aligned}$$

existe e independe da aproximação de ξ aos pontos $\pm k$, por cima ou por baixo. Consequentemente, $\hat{f}(\xi)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ e limitada:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\pm k)| = \sqrt{2\pi} \frac{N}{2k} < \infty.$$

3. Se $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, então

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(a-i\xi)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}.
\end{aligned}$$

4. Se $f(x) = e^{-a|x|} \sin cx$, $a > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$f(x) = e^{-a|x|} \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i}.$$

Fazendo uso das propriedades

$$\widehat{af_1 + bf_2}(\xi) = a\hat{f}_1(\xi) + b\hat{f}_2(\xi)$$

$$\widehat{fe^{\pm icx}}(\xi) = \hat{f}(\xi \mp c)$$

juntamente com a transformadas de Fourier do item 3., temos

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2i} \left(\widehat{e^{-a|x|+icx}}(\xi) - \widehat{e^{-a|x|-icx}}(\xi) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c) - \widehat{e^{-a|x|}}(\xi + c) \right) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{(\xi - c)^2 + a^2} - \frac{a}{(\xi + c)^2 + a^2} \right) \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + a^2 + c^2 + 2c\xi)} \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2}
\end{aligned}$$

Observe que em todos os itens acima $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e integrável em valor absoluto, no sentido de uma integral de Riemann imprópria: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx < \infty$, estando desta forma definida sua transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sendo f uma função real sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é real se f for par e imaginária se f for ímpar. Observe também que $\hat{f}(\xi)$ tem a mesma paridade de $f(x)$.

Exercício 2 (i) Para encontrar uma função $f(x)$ cuja transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin b\xi}{\xi} e^{-a\xi^2} := \hat{\chi}(\xi) \hat{\phi}(\xi), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

faremos uso do teorema da convolução (Teorema 6.3' do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo. Para um exercício semelhante, veja pág. 210 deste texto): se

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * \phi, \quad (3)$$

então

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\chi * \phi} = \hat{\chi} \hat{\phi}.$$

As condições para o uso deste teorema são χ e ϕ integráveis e absolutamente integráveis e χ ou ϕ contínua e limitada. Estas condições são satisfeitas como veremos a seguir.

Se $\chi(x) = \sqrt{\pi/2}$ para $|x| \leq b$ e $\chi(x) = 0$ para $|x| > b$, então

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi(-b)}}{-2i} \\ &= \frac{\sin b\xi}{\xi} \end{aligned}$$

coincide com a função definida em (2). Note que χ é integrável e absolutamente integrável.

Se $\phi(x) = e^{-x^2/(4a)}/\sqrt{2a}$, então $\phi \in \mathcal{S}^1$ e (veja (4) e (5) abaixo)

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4a)} e^{-i\xi x} dx \\ &= e^{-a\xi^2} \end{aligned}$$

coincide com a função definida em (2).

Substituindo χ e ϕ no lado direito de (3), concluímos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y) \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y) e^{-y^2/(4a)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y) e^{-y^2/(4a)} dy \end{aligned}$$

¹Em particular, ϕ é contínua, limitada, integrável e absolutamente integrável.

e, usando

$$|x - y| \leq b \Leftrightarrow -b \leq y - x \leq b \Leftrightarrow x - b \leq y \leq x + b ,$$

continuamos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{8a}} \int_{x-b}^{x+b} e^{-y^2/(4a)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{(x-b)/\sqrt{4a}}^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds - \int_0^{(x-b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x+b}{\sqrt{4a}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-b}{\sqrt{4a}} \right) \right) \end{aligned}$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ é a função erro.

(ii) Verifiquemos o teorema de Plancherel–Parseval: $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$ para a função Gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/(2a)}$$

cuja transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\xi^2/2} .$$

De fato, se $\phi(x) = e^{-x^2/(4\alpha)}/\sqrt{2a}$, então $\phi \in \mathcal{S}^2$ e a transformada de Fourier de ϕ :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4\alpha)} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\sqrt{4\alpha}\xi y) e^{-y^2} dy \equiv \psi(\sqrt{4\alpha}\xi) \end{aligned} \tag{4}$$

é definida em termos de $\psi = \psi(t)$ que satisfaz a equação

$$\psi' + \frac{t}{2}\psi = 0$$

com $\psi(0) = 1$ e cuja solução: $\psi(t) = \exp(-t^2/4)$ resulta em

$$\hat{\phi}(\xi) = \psi(\sqrt{4\alpha}\xi) = e^{-\alpha\xi^2} . \tag{5}$$

Substituindo α por $a/2$ em ϕ e $\hat{\phi}$, multiplicando ambos por $1/\sqrt{2\pi}$, obtemos f e $\hat{f}$.

²Em particular, ϕ é contínua, limitada, integrável e absolutamente integrável.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} .\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} ,\end{aligned}$$

concluindo a igualdade.