

Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Transformada de Fourier, Convolução e Fórmula da Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 3 Dezembro 2018

Exercício 1 Considere o problema de valor inicial (PVI) para uma corda elástica infinita, sujeita a uma força externa:

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = h(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

cujas soluções, dada pela fórmula de D'Alembert (veja págs 158-160 do livro texto "Análise de Fourier e EDP" de Djairo G. de Figueiredo)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+vt) + f(x-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy + \frac{v}{2} \int_0^t \int_{x-v(t-s)}^{x+v(t-s)} h(\tau, y) dy ds, \quad (1)$$

desejamos obtê-la pela transformada de Fourier.

Denotando por $\hat{u} = \hat{u}(t, \xi)$ e $\hat{h} = \hat{h}(t, \xi)$ a transformada de Fourier (com respeito a variável x) da solução do PVI e de h :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx \\ \hat{h}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

e usando as propriedades de linearidade da transformada de Fourier e das derivadas com respeito a x

$$\widehat{u_{xx}} = i\xi \widehat{u_x} = -\xi^2 \hat{u}$$

e com respeito a t

$$\widehat{u_{tt}} = \hat{u}_{tt}$$

(inversão de ordem das derivadas com a integral de Fourier), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx}} &= \frac{1}{v^2} \widehat{u_{tt}} - \widehat{u_{xx}} \\ &= \frac{1}{v^2} \hat{u}_{tt} + \xi^2 \hat{u} = \hat{h} \end{aligned} \quad (2)$$

sujeita às condições iniciais

$$\begin{aligned} \hat{u}(0, \xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}_t(0, \xi) &= \hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Estamos assumindo que as integrais de Fourier destas quantidades façam sentido.

A solução de (2), pelo método da variação das constantes,

$$\hat{u}(t, \xi) = A \cos v\xi t + B \sin v\xi t + v \int_0^t \frac{\sin v\xi(t-s)}{\xi} \hat{h}(s, \xi) ds$$

onde A e B são constantes dependentes da variável ξ , determinadas por (3):

$$\hat{u}(0, \xi) = A = \hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}_t(0, \xi) = v\xi B = \hat{g}(\xi) ,$$

é dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos v\xi t + \frac{1}{v} \frac{\sin v\xi t}{\xi} \hat{g}(\xi) + v \int_0^t \frac{\sin v\xi(t-s)}{\xi} \hat{h}(s, \xi) ds . \quad (4)$$

Para obter a solução do PVI original, faremos uso do teorema da convolução e fórmula da inversa (veja Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto “Análise de Fourier e equações diferenciais parciais”, Djairo G. de Figueiredo. Para a fórmula da inversa, veja também Corolário 4.18, pág. 48 do “Complementos ao Curso de Física-Matemática I”).

Para o primeiro termo do lado direito de (4), temos

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}(\xi) \cos v\xi t \right)^\vee &= \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\xi) (e^{iv\xi t} + e^{-iv\xi t}) \right)^\vee \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\hat{f}(\xi) e^{iv\xi t} \right)^\vee + \left(\hat{f}(\xi) e^{-iv\xi t} \right)^\vee \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x+vt) + f(x-vt)) \end{aligned}$$

por linearidade e propriedade da transformada inversa da modulação $\hat{f}e^{\pm ivt\xi}$ de $\hat{f}$ (veja Proposição 4.2, pág. 37 dos “Complementos ao Curso de Física-Matemática I”. O sinal da translação é contrário devido ao sinal positivo no expoente da exponencial da anti-transformada), resultando o primeiro termo da solução de D'Alembert (1).

Para o segundo termo do lado direito de (4), aplicamos a transformada inversa juntamente com o teorema da convolução:

$$(\hat{\chi}\hat{g})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * g . \quad (5)$$

Observe que, se $\chi(x) = \chi_{vt}(x) = \sqrt{\pi/2}$ para $|x| \leq vt$ e $\chi(x) = 0$ para $|x| > vt$, então

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-vt}^{vt} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi vt} - e^{-i\xi(-vt)}}{-2i} \\ &= \frac{\sin v\xi t}{\xi} \end{aligned}$$

coincide com a função $\hat{\chi}$ que multiplica $\hat{g}$ em (4).

Finalmente, para o terceiro termo do lado direito de (4), temos

$$\begin{aligned} v \left(\int_0^t \hat{\chi}_{v(t-s)}(\cdot) \hat{h}(s, \cdot) ds \right)^\vee(x) &= v \int_0^t \left(\hat{\chi}_{v(t-s)}(\cdot) \hat{h}(s, \cdot) \right)^\vee(x) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v \int_0^t (\chi_{v(t-s)} * h)(x) ds \end{aligned}$$

onde fizemos uso da linearidade e do teorema de Fubini ao trocar a anti-transformada de Fourier com a integração sobre s , sob a hipótese do integrando ser uma função integrável em ξ e absolutamente integrável em s e ξ , juntamente com o teorema da convolução e fórmula da inversa.

De onde se conclui

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (\hat{u}(t, \xi))^\vee \\ &= \left(\hat{f}(\xi) \cos v\xi t \right)^\vee + \frac{1}{v} \left(\frac{\sin v\xi t}{\xi} \hat{g}(\xi) \right)^\vee + v \left(\int_0^t \frac{\sin v\xi(t-s)}{\xi} \hat{h}(s, \xi) ds \right)^\vee \\ &= \frac{1}{2} (f(x+vt) + f(x-vt)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \chi_{vt} * g + \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (\chi_{v(t-s)} * h)(x) ds \\ &= \frac{1}{2} (f(x+vt) + f(x-vt)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{vt}(x-y) g(y) dy \\ &\quad + \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{v(t-s)}(x-y) h(s, y) dy ds \\ &= \frac{1}{2} (f(x+vt) + f(x-vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy + \frac{v}{2} \int_0^t \int_{x-v(t-s)}^{x+v(t-s)} h(s, y) dy ds, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. Na última linha empregamos as equivalências (com $\tau = t$ e $\tau = t-s$): $|x-y| \leq v\tau \iff -v\tau \leq y-x \leq v\tau \iff x-v\tau \leq y \leq x+v\tau$.

Exercício 2 Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} - bu = g(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

e

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

onde f e g são funções da classe $\mathcal{S}$ em x e $b > 0$.

Vamos aplicar o método da transformada de Fourier para resolver o PVI. Para isso, seja

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx \\ \hat{g}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x) e^{-i\xi x} dx \\ \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier das equações (6) e (7), juntamente com as propriedades satisfeitas por esta, temos

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} - bu} &= \frac{1}{\kappa}\widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} - b\widehat{u} \\ &= \frac{1}{\kappa}\widehat{u_t} + \xi^2\widehat{u} - b\widehat{u} = \widehat{g}\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\widehat{u_t} + \kappa(\xi^2 - b)\widehat{u} = \kappa\widehat{g}$$

e

$$\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{f}(\xi)$$

cujas soluções são, por integração na variável t com $\xi \in \mathbb{R}$ fixo,

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa t(\xi^2 - b)}\widehat{f}(\xi) + \kappa \int_0^t e^{-\kappa(t-s)(\xi^2 - b)}\widehat{g}(s, \xi) \, ds.$$

Para obter a solução do PVI, equações (6) e (7), faremos uso do teorema da convolução e fórmula da inversa (veja referências e hipóteses no exercício anterior)

$$\begin{aligned}u(t, x) &= (\widehat{u})^\vee(t, x) \\ &= \left(e^{-\kappa t(\xi^2 - b)}\widehat{f}\right)^\vee(x) + \left(\kappa \int_0^t e^{-\kappa(t-s)(\xi^2 - b)}\widehat{g}(s, \cdot) \, ds\right)^\vee(x) \\ &= e^{\kappa b t} \left(e^{-\kappa t \xi^2}\widehat{f}\right)^\vee(x) + \kappa \int_0^t e^{\kappa b(t-s)} \left(e^{-\kappa(t-s)\xi^2}\widehat{g}(s, \cdot)\right)^\vee(x) \, ds.\end{aligned}\tag{8}$$

Aplicando o teorema da convolução ao primeiro termo da solução,

$$\left(e^{-\kappa t \xi^2} \cdot \widehat{f}\right)^\vee(x) = \sqrt{2\pi} \left(\widehat{\phi}(t, \cdot) \cdot \widehat{f}\right)^\vee(x) = (\phi(t, \cdot) * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x - y) f(y) \, dy, \tag{9}$$

onde a anti-transformada de Fourier ϕ de $\widehat{\phi}(t, \xi) = e^{-\kappa t \xi^2} / \sqrt{2\pi}$,

$$\begin{aligned}\phi(t, x) &= \left(\widehat{\phi}\right)^\vee(t, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(t, \xi) e^{i\xi x} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa t \xi^2} e^{i\xi x} \, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t} I\left(x/(2\sqrt{\kappa t})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi \kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}\end{aligned}\tag{10}$$

é a distribuição Gaussiana centrada na origem de variância (quadrado da largura) $2\kappa t$. Na última linha, o valor da integral (obtida completando o quadrado no expoente)

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi - iz)^2} d\xi$$

independe de $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} I'(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2i(\xi - iz)e^{-(\xi - iz)^2} d\xi \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-(\xi - iz)^2} \right)' d\xi \\ &= -i e^{-(\xi - iz)^2} \Big|_{\xi=-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$e I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Analogamente, aplicando o teorema da convolução ao integrando do segundo termo da solução, com $\tau = t - s$,

$$\begin{aligned} \left(e^{-\kappa\tau\xi^2} \cdot \hat{g}(s, \cdot) \right)^\vee(x) &= \sqrt{2\pi} \left(\hat{\phi}(\tau, \cdot) \cdot \hat{g}(s, \cdot) \right)^\vee(x) \\ &= (\phi(\tau, \cdot) * g(s, \cdot))(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - s, x - y) g(s, y) dy. \end{aligned} \tag{11}$$

De onde se conclui, juntamente com (8), (9) e (10),

$$u(t, x) = e^{\kappa bt} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4\kappa t} f(y) dy + \kappa \int_0^t e^{\kappa b\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4\kappa\tau} g(t - \tau, y) dy d\tau$$

devido a simetria do produto de convolução na variável t .

Bibliografia. Djairo G. de Figueiredo “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, Capítulo 6.