

Física IV - 2024

Lista de Exercícios 01

Prof. Antônio Martins Figueiredo Neto

Data de Entrega: 16/08/2024

Nota: Apenas os exercícios indicados com (*) devem ser entregues.

Exercício 1*

Considere o campo eletromagnético

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kx) \cos(ky) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = B_0 [\hat{\mathbf{x}} \cos(kx) \sin(ky) - \hat{\mathbf{y}} \sin(kx) \cos(ky)] \sin(\omega t)$$

definido na região $(x, y, z) \in \left[-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k} \right] \times \left[-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k} \right] \times \mathbb{R}$.

- (a) Qual devem ser as razões E_0/B_0 e ω/k para que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfaçam as Equações de Maxwell?
- (b) Faça um esboço dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em $t = \pi/4\omega$.

Exercício 2*

Considere duas ondas planas monocromáticas no vácuo definidas por

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \cos(kz + \omega t) \hat{\mathbf{x}}$$

- (a) Qual a direção de propagação e o vetor de polarização de cada uma dessas ondas?
- (b) Mostre que $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ se somam em uma onda estacionária $\mathbf{E}_T = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}}$.
- (c) Obtenha o campo magnético $\mathbf{B}_T$ associado à $\mathbf{E}_T$ a partir dos campos $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ associados aos campos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$, respectivamente.
- (d) Reobtenha $\mathbf{B}_T$, dessa vez partindo de $\mathbf{E}_T$ e fazendo uso das Equações de Maxwell.

Exercício 3

Nesse exercício, queremos escrever as Eqs de Maxwell em sua forma covariante. Definimos os objetos $A^\mu \equiv (A^0, \mathbf{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, conhecidos como *4-vetores*, de tal forma que se $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, então $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$. Vamos utilizar a convenção da soma de Einstein, em que índices repetidos devem ser somados: $\sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu \equiv A_\mu B^\mu$.

Começamos por denotar a densidade de carga, ρ , e a densidade de corrente elétrica, $\mathbf{J}$, como componentes de um único objeto, conhecido como *4-corrente*: $J^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{J})$.

(a) Verifique que a equação da continuidade, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, pode ser escrita como $\partial_\mu J^\mu = 0$, onde $\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$.

Ao escrevermos as Equações de Maxwell em termos dos potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, uma das escolhas de gauge que podemos fazer é dada pelo gauge de Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Decorre dessa escolha que as equações resultantes para ϕ e $\mathbf{A}$ são equações de onda com fontes (verifique!):

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (2)$$

(b) Mostre que o gauge de Lorentz, Equação 1, pode ser escrito em notação covariante como $\partial_\mu A^\mu = 0$, onde $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right)$.

(c) Mostre que (2) pode ser escrito como $\partial^2 A^\alpha = \mu_0 J^\alpha$, onde $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ e $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Voltando aos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, eles são escritos em termos dos potenciais como

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (3)$$

Por exemplo, para a componente x , devemos ter:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -c \partial^0 A^1 + \partial^1 (c A^0) = c (\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) \\ B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \end{cases} \quad (4)$$

onde usamos $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$. Essas relações sugerem que as componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são elementos de

uma única entidade física, conhecida como *Tensor de Faraday*:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (5)$$

Explicitamente, em forma matricial, $F^{\mu\nu}$ é dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(d) Verifique a Equação 6 (note que $F^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico, de sorte que apenas 6 de suas 16 componentes são independentes).

(e) Utilizando os resultados dos itens (b) e (c), demonstre que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (7)$$

(f) Verifique explicitamente que a Equação 7 reproduz as Leis de Euler e Ampère, tomando $\nu = 0, 1, 2, 3$

As Equações de Maxwell restantes seguem diretamente da definição de $F^{\mu\nu}$. Vejamos:

(g) Verifique que $F^{\mu\nu}$ satisfaz a *identidade de Bianchi*:

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} = 0 \quad (8)$$

Dica: aplique diretamente a Equação 5.

(h) Finalmente, vamos verificar que a identidade de Bianchi conduz corretamente às Equações de Maxwell restantes, tomando:

(i) $\rho = 0, \mu = 1, \nu = 2$, para obter a componente z da Lei de Faraday. O que você pode dizer sobre as outras componentes?

(ii) $\rho = 1, \mu = 2, \nu = 3$ para obter $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.