

Física IV - 2024

Lista de Exercícios 02

Prof. Antônio Martins Figueiredo Neto

Data de Entrega: 23/08/2024

Nota: Apenas os exercícios indicados com (*) devem ser entregues.

Leitura Sugerida: Griffiths, 3^a ed, seções 9.3 e 9.4.

Exercício 1*

Nesse exercício, vamos investigar ondas eletromagnéticas em condutores. A Lei de Ohm nos diz que a densidade de corrente livre é dada por

$$\mathbf{J}_\ell = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

Nesse caso, as Eqs de Maxwell tomam a forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_\ell}{\epsilon}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

(a) Utilizando a eq. da continuidade, $\nabla \cdot \mathbf{J}_\ell + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = 0$, e a lei de Gauss, mostre que

$$\rho_\ell(t) = e^{-(\sigma/\epsilon)t} \rho_\ell(0)$$

Como você interpreta esse resultado?

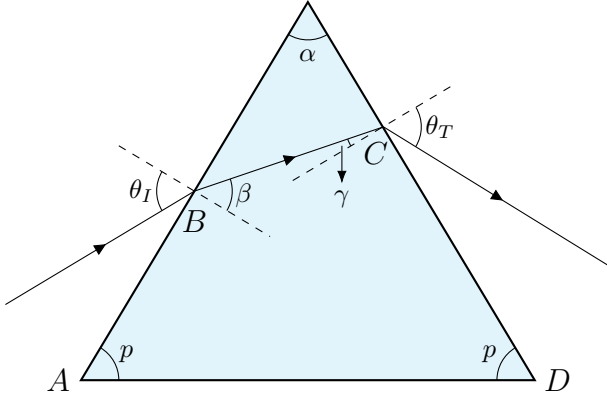
(b) Supondo agora que esperamos tempo suficiente para que toda a carga livre se dissipasse, isto é, assumindo $\rho_\ell = 0$, mostre que as Eqs de Maxwell implicam nas seguintes equações de onda modificadas para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

(c) Explique qualitativamente o efeito introduzido na propagação dos campos pelas derivadas temporais de primeira ordem nas equações acima.

Exercício 2*

Considere o prisma ilustrado abaixo, constituído por um material de índice de refração n (assuma que o índice de refração do ar é $\simeq 1$).



(a) Mostre que $\beta + \gamma = \alpha$ (Dica: use o fato de que a soma dos ângulos internos do quadrilátero ABCDA é 2π .)

(b) Usando a Lei de Snell nos pontos B e C e o resultado do item anterior, mostre que

$$\sin \theta_T = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I} \sin \alpha - \sin \theta_I \cos \alpha \quad (3)$$

(c) Suponha agora que um raio de luz incide sobre uma lâmina de faces paralelas. Use a Eq. 3 para mostrar que o raio transmitido é paralelo ao incidente.

Argumente que o limite apropriado é $\alpha \rightarrow 0$.

Exercício 3

Tratamos em aula a incidência normal de uma onda eletromagnética de um meio 1 para um meio 2. Uma das suposições feitas foi a de que os campos refletidos e transmitidos possuíam a mesma polarização. Vamos mostrar que isso deve ser assim. Considere uma onda incidente, dada abaixo:

$$\tilde{\mathbf{E}}_I = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_I = \frac{\tilde{E}_{0I}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

No plano $z = 0$ se encontra uma interface separando dois meios lineares. A onda incidente, dada acima, produz uma onda refletida que viaja de volta:

$$\tilde{\mathbf{E}}_R = \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}_R$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_R = -\frac{\tilde{E}_{0R}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}_R)$$

Além de uma onda transmitida:

$$\tilde{\mathbf{E}}_T = \tilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}_T$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_T = \frac{\tilde{E}_{0T}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}_T)$$

Onde $\hat{\mathbf{n}}_R$ e $\hat{\mathbf{n}}_T$ são os vetores de polarização das ondas refletidas e transmitidas:

$$\hat{\mathbf{n}}_R = \cos \theta_R \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_R \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_T = \cos \theta_T \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_T \hat{\mathbf{y}}$$

Usando as condições de contorno adequadas, mostre que $\theta_R = \theta_T = 0$, ou seja, as ondas refletidas e transmitidas tem a mesma polarização da onda incidente.