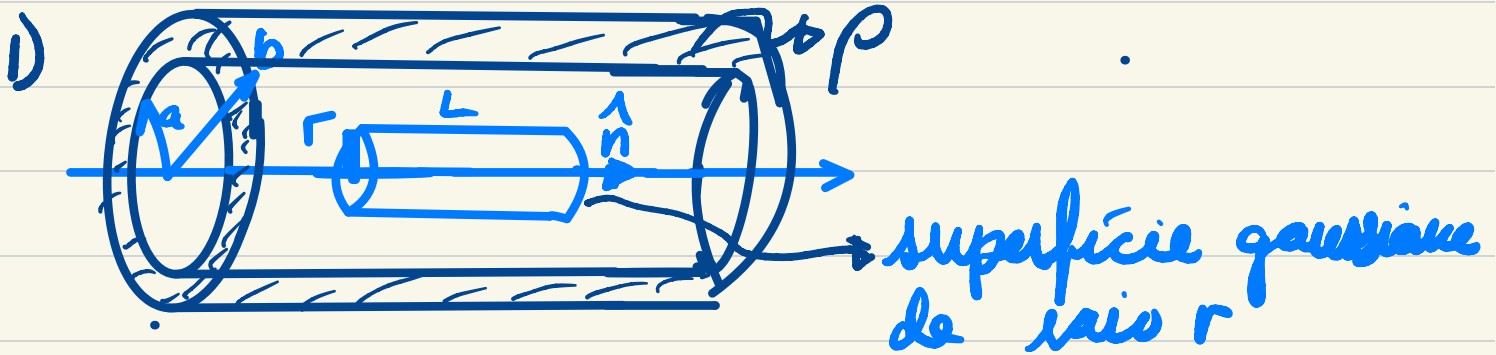


## EletrMag I - P1 - GABARITO 25



Lei de Gauss:  $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0}$

i) para  $r < a \Rightarrow$  não há carga nesta região  
 $\Rightarrow E = 0$

ii)  $a \leq r \leq b$ :  $\vec{E} = E \hat{r}$

$$\oint_S E(r) r d\psi dz = E(r) r 2\pi \int_0^L dz = 2\pi L r E(r)$$

$$\int \rho dV = \rho 2\pi \int_a^r r' dr' \int_0^L dz = \rho 2\pi \left[ \frac{r'^2}{2} \right]_a^r = \rho \pi L (r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow 2\pi L r E(r) = \frac{\rho \pi L}{\epsilon_0} (r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2r \epsilon_0} (r^2 - a^2) \hat{r}$$

$$\text{iii) } r > b: \oint_S E(r) r d\varphi dz = E(r) r 2\pi L$$

$$\int \rho dV = 2\pi \rho L \left[ \frac{r^2}{2} \right]_a^b = \pi \rho L (b^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (b^2 - a^2) \hat{r}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ a) } \nabla \times \vec{F} &= C \left[ \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right] = C (-2y\hat{i} - 3z\hat{j} - x\hat{k}) \neq 0 \end{aligned}$$

e  $\therefore$  não representa um campo eletrostático dado que  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$

item b no final do gabarito!

c) As equações de Poisson e de Laplace:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla^2 V = 0. \text{ Dado que}$$

não conhecemos  $\rho$ , usamos a de Laplace.

c) As condições de:

- Dirichlet: especificar  $V$  na superfície

- Neumann:  $\parallel \frac{\partial V}{\partial n} \parallel$

$$3) a) V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{r_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$b) \vec{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right] \hat{x} + \left[ -\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right] \hat{y} \right\}$$

$$4) a) \vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) \quad V(\vec{r}) = K(x^2 - y^2)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} = 2K(x\hat{x} - y\hat{y})$$

$$\vec{E} = 2K(-x\hat{x} + y\hat{y}) \quad \checkmark$$

$$b) \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\partial}{\partial x} E_x - \frac{\partial}{\partial y} E_y = -2k(-1+1) = 0$$

⑤

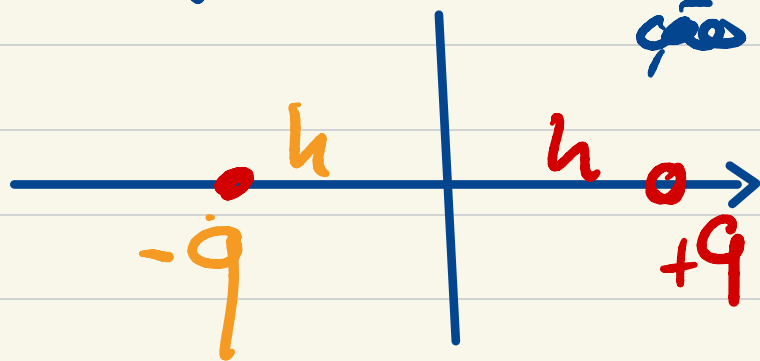


a) Plano condutor aterrado:

$$V=0 \text{ p/ } z=0$$

$$V \rightarrow 0 \text{ p/ } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \gg h$$

b) Usando o método de imagem, dado que a superfície condutora é plana, uma carga  $+q$  na posição  $h$  estará sempre equidistante ao plano em relação à carga real. Desta forma, usamos a



configuração ao lado e ignoramos o plano condutor.

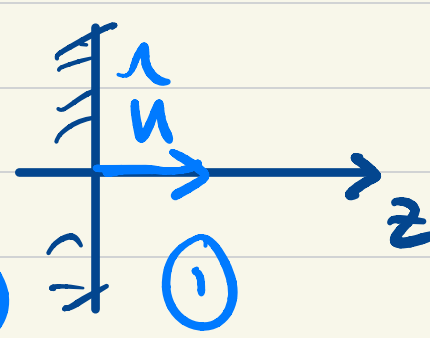
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} \right)$$

satisfazendo:

$$p) z=0 \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \right) = 0$$

$$p) \sqrt{x^2+y^2+z^2} \gg h \Rightarrow V \rightarrow 0$$

c)



$$\left. \begin{array}{l} E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ E_{1\parallel} - E_{2\parallel} = 0 \end{array} \right\} \vec{E} = \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

para  $z \geq 0$

$$\Rightarrow \nabla V = -E \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial u} \hat{u} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

$$\Rightarrow \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial u} \Big|_{z=0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial h} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{2hq}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow V(x, y, 0) = - \frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

2b) Não é necessário nem que a carga nem a distância sejam iguais. Como exemplo, temos o cálculo do potencial na região externa de uma superfície esférica. Neste caso, sabe-se que a distância entre carga e imagem e a real são  $\neq$  para cada ponto da superfície, o que implica que a imagem será  $\neq$  tanto da carga q<sup>to</sup> da distância.