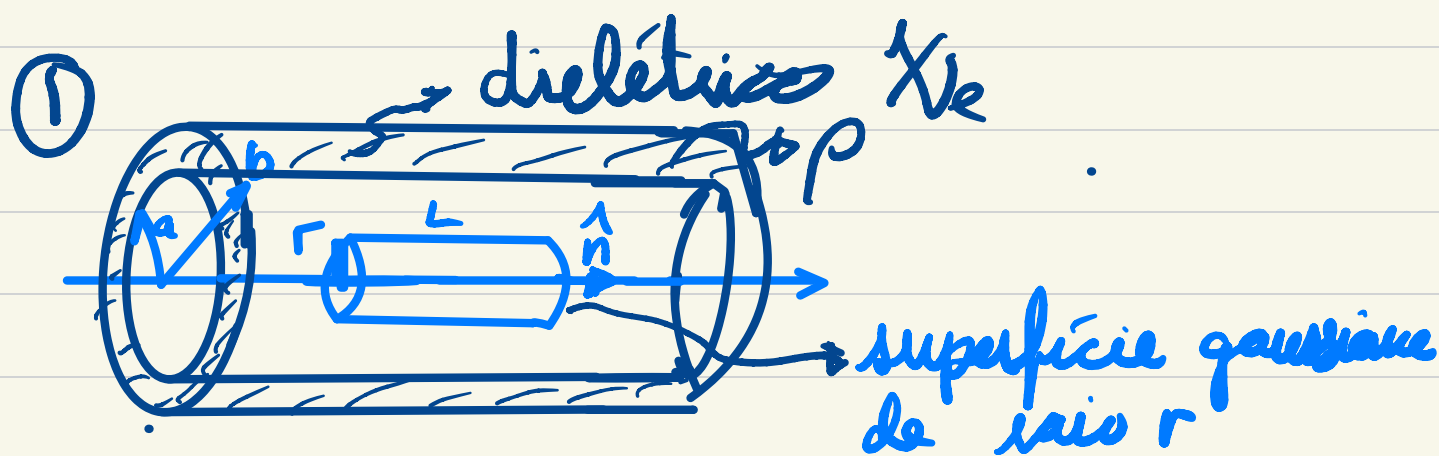


E & M I - GABARITO P2



Lei de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$

$q \equiv$ carga por unidade de comprimento
 $\Rightarrow$ densidade linear

a)

$\rightarrow$ para $r < a$: $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

$\rightarrow a < r < b$: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} = qL$
 livres

$D 2\pi r L = qL \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{2\pi r} \hat{r}$

$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$ $\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi r \epsilon_0 (1 + \chi_e)} \hat{r}$ //

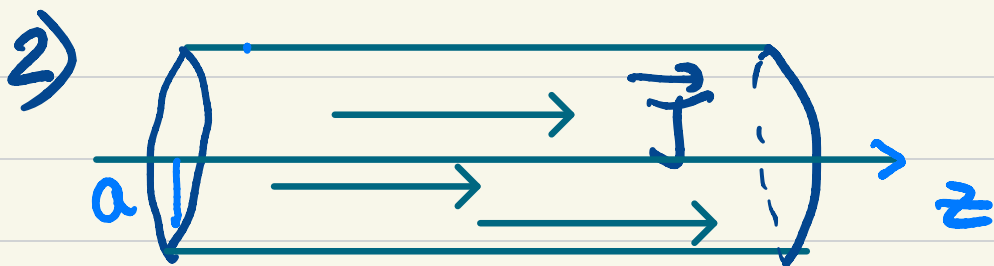
$$\rightarrow r > b: Q_{int} = qL$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E L \pi r L = \frac{qL}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} //$$

$$b) \vec{D} = \epsilon_0 \kappa_e \vec{E} = \frac{q \kappa_e}{2\pi r (1 + \kappa_e)} \hat{r} \quad (a < r < b)$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{D} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{q \kappa_e}{2\pi r (1 + \kappa_e)} \right] = 0 //$$

$$G_b = \vec{D} \cdot \hat{n} = \begin{cases} -\frac{q \kappa_e}{2\pi a (1 + \kappa_e)} & \text{na sup da} \\ +\frac{q \kappa_e}{2\pi b (1 + \kappa_e)} & \text{raio } b \end{cases}$$



Usando a Lei de Ampere:

$$r < a: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_{int}$$

$$I_{int} = \int \vec{J} dS = K \pi r^2$$

onde o sentido é dado pela regra da mão direita

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 K \pi r^2 \hat{\varphi}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 K r}{2} \hat{\varphi}$$

$\rightarrow r > a$: procedendo da mesma forma:

$$I_{\text{int}} = K \pi a^2 \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 K a^2}{2r} \hat{\varphi}$$

3) a) Separando as variáveis r e θ :

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (\text{Eq. 1})$$

$\rightarrow$ para $r < R$

* $r=0 \Rightarrow B_l=0$ para todos os l
(senão V "explode" no origem)

* usando a condição de contorno:

$$V(R, \theta) = V(\theta) = V_0 + V_1 \cos \theta + V_2 \cos(2\theta)$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4} (1 + 3\cos 2\theta)$$

$$4P_2(\cos\theta) = 1 + 3\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{4P_2}{3} - \frac{1}{3}P_0$$

$$V_0 + V_1 \cos\theta + V_2 \cos(2\theta) = V_0 P_0 + V_1 P_1 + \frac{4V_2 P_2}{3} - \frac{1V_2 P_0}{3}$$

onde $P_i = P_i(\cos\theta)$

→ usa eq. ①:

$$A_0 P_0 + A_1 R P_1 + A_2 R^2 P_2 = \left(V_0 - \frac{V_2}{3}\right) P_0 + V_1 P_1 + \frac{4V_2 P_2}{3}$$

$$\Rightarrow A_0 = V_0 - \frac{V_2}{3}; A_1 = \frac{V_1}{R}; A_2 = \frac{4}{3} \frac{V_2}{R^2}$$

$$V(r, \theta) = \left(V_0 - \frac{V_2}{3}\right) P_0 + \frac{V_1 r}{R} P_1 + \frac{4V_2 r^2}{3R^2} P_2$$

$$V(r, \theta) = V_0 + V_1 \frac{r}{R} \cos\theta + \frac{V_2}{3} \left[-1 + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) \right]$$

→ para $r > R$:

* tomando $r \gg R$: $V(\infty, \theta) = 0 \Rightarrow$ todas $A_k = 0$

* usando as CC e o cálculo anterior:

$$\frac{B_0 P_0}{R} + \frac{B_1 P_1}{R^2} + \frac{B_2 P_2}{R^3} = V_0 P_0 + V_1 P_1 + \frac{4V_2 P_2}{3} - \frac{V_2}{3} P_0$$

$$\Rightarrow B_0 = \left(V_0 - \frac{V_2}{3}\right) R; B_1 = V_1 R^2; B_2 = \frac{4}{3} V_2 R^3$$

$$V(r, \theta) = V_0 \frac{R}{r} - \frac{V_2 R}{3r} + V_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta + \frac{4}{3} V_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$V(r, \theta) = \frac{R}{r} \left\{ V_0 + \frac{R V_1 \cos \theta}{r} + \frac{V_2}{3} \left[-1 + 2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \right\}$$

b) $\exists$ descontinuidade na componente normal de $\vec{E}$

$$[E_{Ar} - E_{Br}]_{r=R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{onde } E_A = E(r > R), \\ E_B = E(r < R)$$

$$\left[-\frac{\partial V_A}{\partial r} + \frac{\partial V_B}{\partial r} \right]_{r=R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

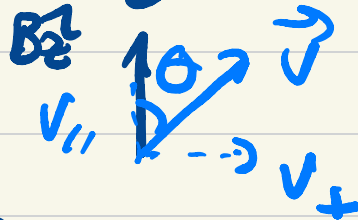
$$\frac{\partial V_A}{\partial r} = -R \left\{ \frac{V_0}{r^2} + \frac{2R V_1 \cos \theta}{r^3} + \frac{V_2}{3} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{6R^2}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial V_B}{\partial r} = \frac{V_1}{R} \cos \theta + \frac{4V_2}{3R^2} r (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{R} \left[V_0 + 3V_1 \cos \theta + \frac{10V_2}{3} (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{V_2}{3} \right]$$

4) A partícula, ao entrar na região magnetizada, sente a força de Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

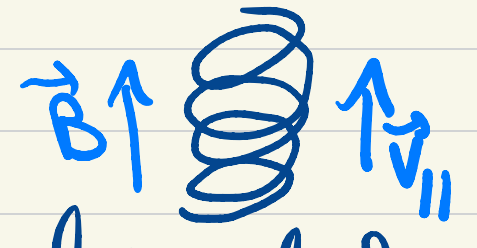


$$\vec{F} = qvB \sin \theta (\vec{v}_\perp \times \hat{z}) = qvB \sin \theta \hat{x} \quad (\text{ou } -\hat{y})$$

onde a componente $v_\parallel$ não sente a presença de $\vec{B}$

$\vec{F}$ corresponde à força centrípeta:

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = qvB \sin \theta \Rightarrow v_\perp = \frac{qB}{m} R \sin \theta$$

e temos  e a partícula realiza um movimento helicoidal

Essencial: o movimento $\parallel$ decorre do fato de que uma das componentes de $\vec{v}$ não é afetada por $\vec{B}$ enquanto a outra é $\parallel$