

Mec_1Sem2019 - Lista de Exercícios #1

Lista a ser avaliada por um teste no dia 28.02.

- Vetores e sistemas de coordenadas I
- Vetores e sistemas de coordenadas II
- Leis de Newton I: fundamentos

1 Símbolo ε_{ijk} e o produto vetorial

Pode-se definir o símbolo de permutação ε_{ijk} (com i, j e k iguais a 1, 2 ou 3) da seguinte maneira (Marion&Thornton Cap. 1):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{= caso dois ou mais índices sejam iguais} \\ +1 & \text{= para os índices formando uma permutação par de 1, 2, 3} \\ -1 & \text{= para os índices formando uma permutação ímpar de 1, 2, 3} \end{cases}$$

Por exemplo, $\varepsilon_{123} = 1$ se trocarmos o 3 com o 1 temos ε_{321} , como foi feita uma única permutação, $\varepsilon_{321} = -1$. Considere dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de três componentes em um sistema de coordenadas $\hat{e}_i$. Considere ainda a definição do produto vetorial em termos dos versores $\hat{e}_i$:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \\ \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \\ \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \end{cases}$$

(a) Mostre que (convença-se que) as três equações acima podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

(b) Tomando $\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$ e uma expressão similar para $\vec{B}$, definimos $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Calcule explicitamente $C_i = (\vec{A} \times \vec{B})_i$ (a componente $\hat{e}_i$ do produto vetorial entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$).

(c) Mostre que seu resultado pode ser escrito na seguinte forma:

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

e que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

(d) Adote coordenadas cartesianas ($A_i = A_x$, etc) e mostre explicitamente que a fórmula $C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ se reduz a fórmula usual para as três componentes de $\vec{A} \times \vec{B}$.

2 Trajetórias no sistema cartesiano

Considere o seguinte vetor posição de uma partícula no sistema cartesiano:

$$\vec{r}(t) = 2b \sin \omega t \hat{i} + b \cos \omega t \hat{j}$$

(a) Faça um esboço da trajetória associada a $\vec{r}(t)$ para t no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$. Não deixe de anotar no seu esboço os parâmetros $2b$ e b . Qual o período τ desta trajetória?

(b) Determine os vetores $\vec{v}$ e $\vec{a}$. Encontre ainda o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{r}$.

(c) Ilustre os vetores $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ de uma determinada partícula de massa m em um ponto nessa trajetória. Determine ainda os pontos da trajetória onde $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são perpendiculares (dica: você não precisa fazer muitas contas!).

(d) Encontre os tempos t , em termos de τ , nos quais a condição do item (c) é satisfeita.

(e) Mostre que $m\vec{r} \times \vec{v}$ é constante nessa trajetória.

3 Dedução da fórmula para $\mathbf{a}$

Em coordenadas cilíndricas temos $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$. Em termos do sistema cartesiano, estes versores se escrevem:

$$\begin{cases} \hat{r} &= \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \\ \hat{k} &= \hat{k} \end{cases}$$

(a) Mostre que $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ e que $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{r}$.

(b) Mostre que $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$.

(c) Cheque que cada termo da expressão para $\mathbf{a}$ possui a dimensão correta (L/T^2).

4 Sistema de coordenadas esféricas

No sistemas de coordenadas esféricas, o vetor posição de uma partícula tem uma única componente:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}$$

onde:

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \hat{\rho} &= \cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \end{cases}$$

(a) Represente uma partícula no espaço usando o sistema esférico: indique ρ , $\hat{\rho}$, ϕ e θ . Discuta a diferença entre o vetor $\vec{r} = r\hat{r}$ (coordenadas polares) e o presente vetor $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$. Qual a relação entre os dois vetores? Qual a relação entre r e ρ ? Represente sua discussão graficamente.

(b) As demais direções do sistema esférico se escrevem:

$$\begin{cases} \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \end{cases}$$

deduza a expressão mais geral para $\vec{v}$ e ainda uma expressão para $\vec{v} \cdot \vec{v}$.

5 Elipse em coordenadas polares

Considere a elipse representada na figura . A origem de um sistema de coordenadas polares é associada a *um dos focos desta elipse*. A posição de uma partícula, restrita a mover-se em um plano, é indicada pelo vetor posição $\vec{r}$. Considere que a elipse em questão tem semieixo maior a , semieixo menor b e excentricidade ϵ . Note, conforme indicado, que a distância focal é ϵa .

(a) Represente um vetor $\vec{r}'$ que aponta do ponto focal f' para a partícula. Lembre-se que, pela definição da elipse, $|\vec{r}| + |\vec{r}'| = C$ onde C é uma constante. Determine o valor da constante C em termos dos demais parâmetros da elipse.

(b) Considere um vetor $\vec{d}$ que aponta do foco f para o foco f' . Qual o módulo deste vetor? Qual a relação algébrica entre $\vec{r}$, $\vec{r}'$ e $\vec{d}$?

(c) Use a identidade do item b e mostre que:

$$r^2 + d^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{d} = r'^2$$

(dica: eleve os dois lados ao quadrado utilizando o produto escalar). Siga mais alguns passos, e mostre que:

$$\frac{a(1 - \epsilon^2)}{r(\phi)} = (1 + \epsilon \cos \phi)$$

Esta é equação de uma elipse em coordenadas polares na situação na qual a origem do sistema de coordenadas está em um dos focos.

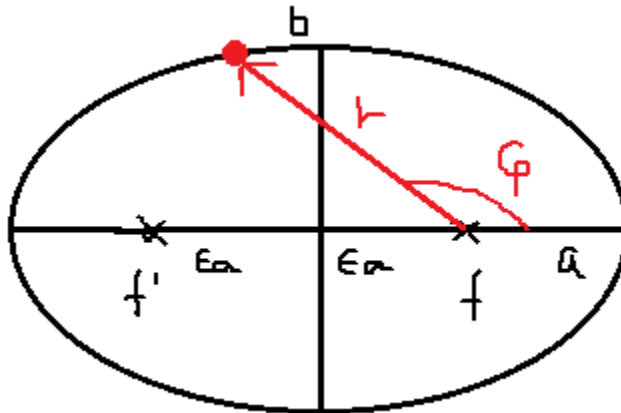


Figura 1: Figura representando uma elipse.

6 Simetrias das leis de Newton

Prove, ou dê um contra exemplo, para cada uma das seguintes afirmações sobre as leis de Newton:

- (a) As leis de Newton são invariantes sob uma translação do sistema de coordenadas.
- (b) As leis de Newton são covariantes (possuem a mesma forma) em qualquer sistema de coordenadas.
- (c) As trajetórias observadas por observadores em referenciais inerciais distintos são sempre as mesmas.
- (d) Se no item (c), as trajetórias podem ser distintas, isso significa que as forças medidas por estes observadores serão distintas? Dê um exemplo explicativo.
- (e) Prove que as leis de Newton são invariantes por reversão temporal (trocar t por $-t$). Discuta um exemplo didático que explique o significado desta simetria.