

# Mec\_1Sem2019 - Lista de Exercícios #2

Lista a ser avaliada por um teste no dia 19.03.

- Leis Newton: aplicações I
- Leis Newton: aplicações II
- Teoremas de Conservação I: sistemas de 1 partícula.
- Teoremas de Conservação II: sistemas de 2 e  $N$  partículas.

## 1 Revisitando o plano inclinado

Considere o problema, resolvido em sala de aula, de um bloco de massa  $m$  sob um plano inclinado, cuja inclinação aumenta a uma taxa  $\alpha$  constante ( $\theta = \alpha t$ ). O plano tem comprimento  $L$  e o bloco parte da extremidade do plano e desliza em direção ao ponto de apoio. Forças de atrito e arraste são ignoradas.

(a) Estude suas anotações sobre o problema. Se considerar necessário, resolva o problema para encontrar  $r(t)$  (você deve saber resolver o problema) e fixar ideias.

(b) Em quanto tempo o plano estará na vertical? Deduza uma expressão para encontrar o tempo no qual o bloco desliza toda extensão do plano.

(c) Para que valores de  $\alpha^2$  o plano pode chegar na vertical e o bloco ainda não ter percorrido todo o plano? Discuta a resposta.

(d) Suponha que quando o plano chega na vertical, o bloco percorreu apenas  $L/2$ . Descreva em palavras a dinâmica subsequente do bloco. Para dar suporte a sua discussão, faça uma diagrama das forças que atuam no bloco no instante no qual o plano chega na vertical e imediatamente depois. Faça o mesmo para o vetor velocidade do bloco.

## 2 Equação da trocoide

Em sala de aula discutimos o problema de uma partícula sob ação de um campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{j}$ . Vimos que para  $v_{0y} = 0$ , a trajetória da partícula será uma circunferência de raio  $r_0 = mv_0/qB_0$  no plano  $zx$ , onde  $m$  é massa da partícula,  $q$  sua carga e  $v_0$  o módulo de sua velocidade inicial (que é constante). Neste contexto, podemos definir  $\omega_c = qB_0/m$ , que chamamos de frequência de ciclotron, de maneira que  $r_0 = v_0/\omega_c$ .

(a) Discuta qualitativamente o problema para um campo  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$  e  $v_{0z} = 0$ . O que ocorre quando  $v_{0z} \neq 0$ ?

(b) Considere a presença de um campo elétrico uniforme e constante  $\vec{E} = E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$  (além da presença do campo  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ ). Escreva a segunda lei de Newton para o problema. Se concentre na componente  $z$  e mostre que  $z(t) = z_0 + v_{0z}t + (qE_z/2m)t^2$ .

(c) Obtenha expressões para  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$ . Determine o período destas funções. Calcule a média temporal destas funções ao longo deste período. A média temporal ao longo de um período se escreve:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

seu resultado deverá ser:

$$\begin{cases} \langle \dot{x} \rangle &= E_y/B_0 \\ \langle \dot{y} \rangle &= 0 \end{cases}$$

(d) Considere as seguintes condições iniciais:  $\dot{x}(0) = E_y/B_0$ ,  $x(0) = -A/\omega_c$ ,  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = A$  (onde  $A$  é uma constante com dimensão de comprimento). E mostre que:

$$\begin{cases} x(t) &= -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{E_y}{B_0} t \\ y(t) &= \frac{A}{\omega_c} \sin \omega_c t \end{cases}$$

Esta são as equações paramétricas de uma trocoide (use o notebook de apoio para visualizar esta trajetória).

(e) Esboce a projeção da trocoide no plano  $xy$ . Faça dois esboços, um para o caso  $A > E_y/B_0$  e outro para o caso  $A = E_y/B_0$  (neste caso, a trocoide se reduz a cicloide).

### 3 Partícula carregada num campo elétrico

Um campo elétrico não uniforme é estabelecido dentro de uma caixa e se escreve  $\vec{E} = -E_0 z \hat{k}$  ( $E_0 > 0$ ), onde  $z$  é a distância vertical ao centro da caixa (ver Fig. 1). Uma partícula carregada de massa  $m$  e carga  $q_0 > 0$  é ejetada para esta região, e o ponto de ejeção é considerado a origem do sistema de coordenadas. A velocidade inicial da partícula, controlada experimentalmente, é  $\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}$ . Ignore qualquer outra força.

- Escreva a segunda lei de Newton para partícula e resolva as equações do movimento. Obtenha  $\vec{r}(t)$ .
- Faça um esboço da trajetória da partícula. Relacione os parâmetro do problema ao esboço.
- Considere o efeito de uma força de arraste devido a viscosidade do ar no interior da caixa. Reescreva a segunda lei de Newton para este caso e obtenha  $\vec{r}(t)$ .
- Faça um esboço da trajetória da partícula para este segundo caso.

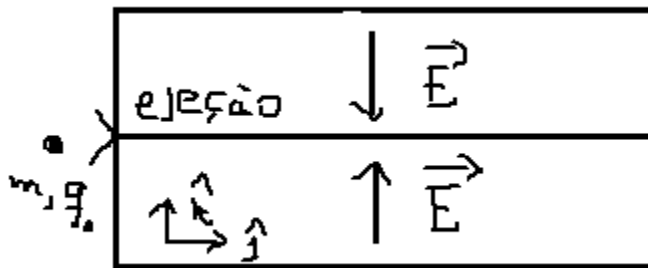


Figura 1: Figura representando uma elipse.

### 4 Bloco em um plano inclinado

Em aula discutimos o problema de forças de arraste com  $F \propto v^2$ . Neste problema, você irá encontrar uma maneira alternativa para estudar a solução da aula e assim tirar uma importante conclusão sobre este tipo de movimento. Considere um bloco deslizando num plano inclinado, com inclinação  $\theta$ , na presença de resistência do ar (sem atrito). Modelamos o resistência sobre este bloco como  $F = kv^2$ , onde  $k$  é uma constante. Considere que o bloco está inicialmente em repouso e na origem do sistema de coordenadas.

- Esboce o diagrama de forças sobre o bloco e escreva as Eqs. de movimento.
- Mostre que, para  $\dot{x}_0 = 0$ , a solução para a seguinte Eq. diferencial:

$$\frac{d\dot{x}}{1 - \dot{x}^2} = dt$$

Pode ser escrita na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \tanh(t)$$

Dicas: lembre-se que

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right)$$

e integre a Eq. para achar a solução como logaritmos. Aplique a condição inicial  $\dot{x}_0 = 0$  e depois use as exponenciais para isolar  $x(t)$ . Lembre-se ainda que:

$$\tanh(t) = \frac{\exp(t) - \exp(-t)}{\exp(t) + \exp(-t)}$$

(c) Utilizando o resultado do item (b), escreva a solução para a velocidade de deslizamento do bloco como função do tempo.

(d) Mostre que o tempo necessário para o bloco mover-se uma distância  $d$  é dado por:

$$t = \sqrt{\frac{m}{kg \sin \theta}} \cosh^{-1}[\exp(kd/m)]$$

Onde  $\cosh^{-1} x$  denota a inversa da função cosseno hiperbólico de  $x$ . Dica: procure a integral da função  $f(x) = \tanh(x)$ .

(e) Modifique o problema proposto para incluir um atrito do tipo  $F_{at} = \mu N$  (apenas discuta o que precisa ser modificado e o resultado).

## 5 Forças conservativas e não conservativas

Considere uma partícula sob ação de várias forças dentre as quais  $\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}$ .

(a) Calcule o trabalho desta força ao longo de uma trajetória circular de raio  $R$  centrada na origem.

(b) Calcule explicitamente  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ .

(c) O teorema de Stokes afirma que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}$$

Discuta o resultado do item (b) a luz do teorema de Stokes.

Considere agora uma partícula sob ação de várias forças dentre as quais  $\vec{F} = \frac{1}{r} \hat{\phi}$  (coordenadas cilíndricas).

(d) Calcule o trabalho desta força ao longo de uma trajetória circular de raio  $R$  centrada na origem.

(e) Calcule explicitamente  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  (dica: olhe o apêndice F do Marion&Thornton para a fórmula do rotacional em coordenadas cilíndricas). Discuta o resultado do item a luz do teorema de Stokes.

## 6 Momento angular de uma partícula

Uma partícula está restrita a mover-se em duas dimensões e está sujeita a duas forças,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , que se escrevem:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 &= \frac{\vec{r}}{r} f(r) \\ \vec{F}_2 &= -\lambda \vec{v} \end{cases}$$

A partícula tem massa  $m$ , posição inicial  $|\vec{r}_0| = R_0$  e velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (v_{0r}, v_{0\theta})$ .

(a) Escreva as equações do movimento para esta partícula.

(b) Determine  $l_z(t)$  da partícula, em relação à origem do sistema de coordenadas, para todo tempo  $t$ .

## 7 Forças centrais e equação do movimento

A equação do movimento para uma partícula sob ação de uma força central se escreve:

$$\begin{cases} f(r) &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ 0 &= m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \end{cases}$$

(a) Mostre que a quantidade  $l_z = mr^2\dot{\phi}$  é conservada. Substitua  $\dot{\phi} = l_z/mr^2$  na equação para  $a_r$  e obtenha uma equação de movimento para a dinâmica da coordenada  $r$  que depende exclusivamente da coordenada  $r$  e suas derivadas  $\dot{r}$  e  $\ddot{r}$ . Se  $l_z$  não fosse constante, esta conclusão seria correta? Discuta.

(b) Mostre que a energia mecânica total (ou mais precisamente, uma quantidade conservada  $h = K + U$ ) de uma partícula sujeita a uma força central pode ser escrita apenas em termos da coordenada  $r$  e sua derivada  $\dot{r}$ .

(c) Considere  $f(r) = \pm kr$  (oscilador harmônico 2D, onde  $k > 0$  é constante) e que  $l_z \neq 0$ , para que sinal (+ ou -) movimento circular de raio  $r = r_0$  é possível (dica: para MC  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ ) ?

(d) Mostre que para o movimento circular de raio  $r_0$ , temos também que  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$  é constante. O movimento circular do item (b), portanto, é um MCU. Encontre  $\dot{\phi}_0$  para o caso do item (b). Parece familiar? Discuta.

## 8 Energia potencial de Lennard Jones

Considere que a interação entre íons de  $H^+$  e  $Cl^-$ , respectivamente denotados íons 1 e 2, é descrita pela seguinte energia potencial:

$$U(x) = U_0 \left( -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}} \right)$$

onde  $U_0$ ,  $a$  e  $b$  são constantes positivas e  $x = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  é a distância entre o centro dos dois íons. Considere que o íon de  $H^+$  tem massa  $1m$ .

(a) Escreva a energia mecânica total para este sistema de partículas.

(b) Calcule a força que age sobre cada um dos átomos. Mostre explicitamente que  $\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}$ , mas que a aceleração (magnitude) do  $H^+$  é consideravelmente maior que a do  $Cl^-$ .

(c) Faça um esboço de  $U(x)$  e mostre que existe uma distância de equilíbrio estável entre os íons. Calcule a frequência de pequenas oscilações em torno desta distância.

(d) Considere que um campo elétrico uniforme, que se escreve  $\vec{E} = E_0 \hat{i}$ , onde  $E_0 > 0$ , é aplicado a este sistema. Dentre as quantidades energia e momento linear, analise quais são conservadas *para o sistema de duas partículas e para cada partícula do sistema*. (4 considerações ao todo) .

## 9 Atração gravitacional

Um sistema binário de estrelas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , onde  $m_1 > m_2$ , interagem por meio da força gravitacional:

$$\vec{F}_{1(2)} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \hat{r}_{12}$$

As estrelas se encontram em um estado ligado.

(a) Escreva a energia mecânica total deste sistema. Determine a energia potencial efetiva  $V_{eff}(r)$  para descrever este problema de dois corpos. Para simplificar suas expressões use  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  e  $k = G m_1 m_2$ . Faça um esboço de  $V_{eff}(r)$ .

(b) Determine o momento angular total  $L_z$  para o qual as massas estão a uma distância de equilíbrio  $a$ . Determine também a energia total  $E$  nesta mesma situação.

(c) Mostre explicitamente que é apenas para  $E < 0$  que o sistema está em um estado ligado (ou seja, que existe uma distância máxima e mínima entre as estrelas).

(d) Produza um esquema descrevendo a dinâmica do sistema de duas partículas para a situação de MCU. Adote  $\vec{V}_{cm} = 0$  e inclua um tracejado para a trajetória de cada partícula. Indique ainda o vetor posição relativa e as velocidades e as acelerações de cada partícula (vetores) em dois pontos distintos da trajetória.

## 10 Foguete e força constante

Considere um foguete restrito a mover-se em uma única dimensão sob ação de uma força externa constante  $F_0 \hat{i}$  ( $F_0 > 0$ ). O foguete tem massa inicial  $M$  e expõe combustível a uma taxa  $\alpha$  constante. A velocidade de expulsão do combustível é também constante e de módulo  $u_e$ . Considere que em  $t = 0$  a nave possui velocidade  $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i}$  ( $v_{0x} > 0$ ) e posição inicial  $\vec{x}_0 = 0$ .

(a) A nave precisa ser levada ao repouso pelo sistema de propulsão. Para que direção o combustível deve ser expelido? Justifique.

(b) Escreva a equação do movimento para a nave e encontre sua velocidade com função do tempo. Mostre que é apenas para  $u_e > F_0/\alpha$  que a nave estará sendo desacelerada.

(c) Escreva uma expressão para o tempo  $t'$  no qual a nave terá velocidade 0. Neste instante, qual deve ser a velocidade de ejeção para que a nave permaneça em repouso?

(d) Considere sua expressão para  $v(t)$  e faça a seguinte aproximação:  $\ln(1 - \delta) \approx -\delta$  para  $\delta \ll 1$ . Justifique porque o seu " $\delta$ " é tal que " $\delta$ "  $\ll 1$ . Dentro desta aproximação, determine  $x(t)$ . Qual deve ser  $u_e$  para que a nave chegue ao repouso deslocando-se no máximo  $L_0$  metros?