

Mec _1Sem2019 - Lista de Exercícios #3

Lista a ser avaliada por um teste no dia 28.03.

- Oscilador harmônico
- Ressonâncias e transientes
- Sistemas físicos

1 Oscilador 1-D sujeito a uma força constante

Uma sistema massa mola (massa m e constante k) é fixado a um ponto de apoio e deixado em equilíbrio na vertical. Em $t = 0$, uma força constante, que aponta para baixo, é aplicada à massa por um tempo t_0 . Mostre que, após a força ser removida, o deslocamento da massa de sua posição de equilíbrio ($x = x_{eq}$, onde x é orientado para baixo) é dado por:

$$x(t) - x_{eq} = \frac{F}{k} [\cos \omega_0(t - t_0) - \cos \omega_0 t]$$

onde $\omega_0^2 = k/m$. (dica: quebre a Eq. diferencial em duas: $t < t_0$ e $t > t_0$. Use continuidade de $x(t)$ em t_0 para achar as constantes da solução).

2 Trajetória do espaço de fase

No estudo da equação do oscilador harmônico amortecido, escrevemos a seguinte equação para $x(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\beta \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Definimos o parâmetro $\omega_\beta^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ e diferentes regimes para o oscilador. Para $\omega_0^2 < \beta^2$, $|\omega_\beta| = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ e estamos no chamado regime “superamortecido”. Mostre que a solução geral para $x(t)$ deste problema pode ser escrito na forma:

$$x(t) = [A_1 \exp(-\beta_1 t) + A_2 \exp(-\beta_2 t)]$$

onde definimos $\beta_1 = \beta - |\omega_\beta|$ e $\beta_2 = \beta + |\omega_\beta|$.

(a) Para condições iniciais $v(0) = v_{0x}$ e $x(0) = x_0$, mostre que as constantes A_1 e A_2 são dadas por:

$$\begin{cases} A_1 &= \frac{\beta_2 x_0 + v_{0x}}{\beta_2 - \beta_1} \\ A_2 &= -\frac{\beta_1 x_0 + v_{0x}}{\beta_2 - \beta_1} \end{cases}$$

(b) Se A_1 e A_2 são $\neq 0$, qual termo domina a solução para tempos longos ($t \rightarrow \infty$)?

(c) Mostre que se $A_1 \neq 0$, a trajetória final do espaço de fases sempre estará ao longo da reta $\dot{x} = -\beta_1 x$ para tempos longos.

(d) Mostre que se $A_1 = 0$, a trajetória do espaço de fases sempre estará ao longo da reta $\dot{x} = -\beta_2 x$ para tempos longos.

(e) Faça um esboço destas trajetórias assintóticas em um gráfico para o espaço de fases deste problema.

3 Solução alternativa para o oscilador forçado

Em aula resolvemos o oscilador forçado amortecido testando a seguinte solução particular:

$$x_p(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

De fato, esta solução precisa das duas constantes A e δ porque no oscilador amortecido há uma primeira derivada no tempo (o termo $2\beta\dot{x}$) e a solução precisa de uma fase para se ajustar a equação. Como alternativa à solução

encontrada em aula, encontre a solução particular para o problema do oscilador harmônico forçado amortecido, dado pela equação:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

testando a seguinte tentativa para a função particular:

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Escreva explicitamente a expressão para as constantes A e B em termos dos parâmetros da equação diferencial (dica: você vai usar β , ω_0 , ω , F_0 e m). Qual dos termos é relevante para o trabalho da força de prova $F_0 \cos \omega t$? Justifique. Porque as condições iniciais x_0 e v_0 não são relevantes?

4 Energia do oscilador no estado estacionário

Este exercício irá guiá-lo para estudar questões importantes relacionadas a energia de um oscilador no estado estacionário. Para tal, considere a solução particular obtida no exercício 1 desta lista.

(a) Determine o valor das seguintes integrais:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt$$

Onde $T = 2\pi/\omega$.

(b) A energia mecânica armazenada no oscilador harmônico é dada por:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

Calcule a energia média armazenada no estado estacionário durante um período de oscilação. Ou seja, calcule:

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T E dt$$

onde $T = 2\pi/\omega$. Lembre-se que no estado estacionário: $x(t) = A(\omega) \cos[\omega t - \delta(\omega)]$. Deixe sua resposta em função de $A(\omega)$.

(c) Lembrando que:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Demonstre que a ressonância (máximo como função de ω) das energias potencial e cinética ocorrem em frequências ω_R distintas.

A expressão para $\bar{P}(\omega)$ foi calculada em sala e se escreve:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{(F_0^2/m)\beta\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2]}$$

(d) Determine o valor de ω para o qual ocorre a ressonância de $\bar{P}(\omega)$. Discuta este resultado em contraste com o resultado do item (c). Em particular, faça uma comparação com o caso sem amortecimento $\beta = 0$.

(e) Uma maneira de definir o chamado fator qualidade $Q(\omega)$ de um oscilador é a seguinte: “ 2π vezes a energia média armazenada no oscilador dividida pela potência média absorvida durante um ciclo do oscilador”. Tendo esta definição em mente, determine $Q(\omega)$ para o oscilador e mostre que para $\omega = \omega_0$, temos $Q = \omega_0/2\beta$. Escreva $\bar{P}(\omega_0)$ em termos do fator qualidade.

5 Oscilações amortecidas e forçadas de uma massa

Uma massa pontual m está suspensa a partir de um ponto A e mergulhada em um copo com água (ver figura abaixo). A massa encontra-se inicialmente em equilíbrio e é deslocada para baixo por uma pequena distância vertical. O sistema é deixado para oscilar estritamente na vertical. O comprimento da mola, enquanto relaxada, é l_0 . A água exerce sobre a massa uma força de viscosidade proporcional a velocidade $F_{\text{vis}} = -b\dot{x}$, onde b é uma constante positiva, e a mola tem constante de mola k . Como a massa é pontual, não há força de empuxo (ou, considere desprezível a força de empuxo).

(a) Escreva a segunda lei de Newton para determinar a posição da massa m ao longo do eixo z [$z(t)$]. Escreva a *solução geral* do problema e faça uma descrição qualitativa da dinâmica da massa. Determine a solução para posição inicial igual a z_0 .

(b) O ponto de suspensão é movido para cima e para baixo por um motor externo de maneira que sua posição é descrita por $x(t) = \eta_0 \cos \omega t$. Modifique a segunda lei de Newton para incluir a dinâmica do ponto de suspensão. Mostre que o sistema é equivalente a um oscilador harmônico sujeito a uma força de prova periódica.

(c) Determine $z(t)$ para o estado estacionário do sistema. A diferença de fase entre a dinâmica da massa e do ponto de suspensão seria maior ou menor se o experimento fosse feito no ar? Justifique.

(d) Você estuda a energia absorvida pelo sistema como função de ω . Faça um esboço de um gráfico de $\bar{P}(\omega)$ como função de ω . Indique os parâmetros importantes como ω_0 , altura máxima do pico de absorção $\bar{P}_{\text{max}}(\omega)$, etc... estes parâmetros devem aparecer no seu esboço como função dos dados do problema (k , m , η_0 , b , etc).

(e) O sistema é retirado do copo e o experimento de absorção de potência é repetido no ar. Faça um *segundo* esboço, e compare os gráficos de $\bar{P}(\omega)$ como função de ω obtidos para o experimento feito no ar com o feito na água. Justifique as principais mudanças e semelhanças entre os dois gráficos.

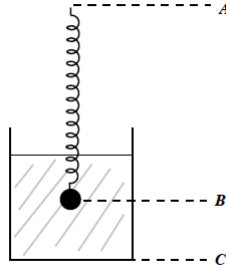


Figura 1: Figura ilustrativa.