

Mec _1Sem2019 - Lista de Exercícios #5

Lista a ser avaliada por um teste no dia 14.05.

- Cálculo de Variações
- O método de Lagrange
- Sistemas com vínculos
- Aplicações do método de Lagrange
- Teoremas de conservação

1 Teoria eletrostática a partir de um princípio variacional

A energia eletrostática total de um sistema é dada pela seguinte expressão discutida, por exemplo, no curso de Física III:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 dV$$

onde ϵ_0 é a permeabilidade dielétrica do vácuo e ϕ é o potencial eletrostático. As equações de Maxwell afirmam que, dado uma certa distribuição de cargas ρ , a configuração correta para o campo eletrostático é dada pela equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Uma maneira alternativa de formular o problema é afirmar que a configuração correta para ϕ é aquela tal que ϕ minimiza a integral:

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho\phi dV$$

Mostre, portanto, que a partir da hipótese que ϕ minimiza U^* , encontramos que:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2 Feynman Lectures, Vol II, cap. 19

Há uma maneira mais intuitiva de deduzir a equação de movimento a partir de um princípio variacional e este exercício irá lhe guiar por este caminho. Considere o caso de uma partícula de massa m em um potencial 1D $V(x)$. A ação S para este sistema se escreve:

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) \right] dt$$

Pelo princípio de Hamilton, sabemos que a trajetória clássica é dada pela $x(t)$ que “extremiza” S . Aqui vamos usar a seguinte estratégia: se $x(t)$ “extremiza” S , uma pequena variação em $x(t)$ causa uma variação de S , que denotamos δS . Em primeira ordem na variação de $x(t)$, δS deve ser 0, expressando o fato que S é um extremo para $x(t)$.

(a) Considere uma pequena variação de $x(t) \rightarrow x(t) + \eta(t)$, tanto no termo cinético quanto no potencial, e substitua na expressão da ação para obter δS . Mantenha apenas os termos de até primeira ordem em $\eta(t)$ e $\dot{\eta}(t)$ (dica: para $U(x)$, use uma série de Taylor).

(b) Considere que $\eta(t)$ é zero nas extremidades de integração e use integração por partes para eliminar o termo $d\eta(t)/dt$ da expressão para δS .

(c) Use o argumento de arbitrariedade de $\eta(t)$ e que $\delta S = 0$ para encontrar a segunda lei de Newton

$$-m \frac{d^2}{dt^2} x - \frac{d}{dx} V(x) = 0$$

* Ver Feynman Lectures on Physics, Vol II, cap. 19, cuja leitura é altamente recomendada. Feynman comenta ainda sobre sua formulação para o princípio variacional em mecânica quântica, cujo desenvolvimento lhe valeu o prêmio Nobel de Física.

3 Partícula em um plano inclinado

Uma partícula de massa m está inicialmente em repouso na extremidade de um plano móvel com inclinação $\alpha = 0$ em $t = 0$ e comprimento l . O plano é suspenso com uma taxa constante de inclinação α ($\theta = \alpha t$), fazendo com que a partícula escorregue sobre o plano. Considere nulo o atrito entre a partícula e o plano (este problema revisita resultados do início do curso).

- (a) Quantos graus de liberdade são necessários para descrever a dinâmica da partícula? Escolha coordenadas generalizadas adequadas e escreva a lagrangiana do sistema.
- (b) Encontre as equações de Lagrange e resolva as equações do movimento.

4 Pêndulo em um suporte acelerado

Um pêndulo simples, de comprimento l e massa m , está acoplado a um suporte de massa desprezível que se desloca verticalmente para cima com aceleração constante a .

- (a) Quantos graus de liberdade são necessários para descrever a dinâmica da partícula? Escolha coordenadas generalizadas adequadas e escreva a lagrangiana do problema.
- (b) Escreva as equações do movimento de Lagrange.
- (c) Faça uma aproximação de pequenos ângulos e encontre o período de pequenas oscilações.

5 Partícula em uma haste

Uma partícula de massa m pode deslizar livremente (sem atritos) ao longo de uma haste rígida, de massa desprezível, representada pelo seguimento AB da figura abaixo. A distância desta haste até a origem é h , assinalada na figura pela linha tracejada ligando os pontos O e C . Considere que esta linha, rígida e de massa também desprezível, liga a haste ao ponto O , onde um dispositivo gira todo o conjunto de maneira que $\dot{\theta} = \omega$ (note que toda a dinâmica da massa m se dá no plano da figura). A posição da partícula é determinada pelo ângulo θ e pela coordenadas generalizada q , assinalada na figura, que mede a distância entre a posição da massa na haste e o ponto C . Perceba (se necessário faça um esquema), que o ângulo θ da figura *não é* o ângulo usualmente definido em coordenadas polares.

- (a) Considere as coordenadas retangulares x e y para a posição da partícula e escreva-as como função das coordenadas q e θ (dica: decomponha a coordenada q nos eixos x e y da figura).
- (b) Considere $\theta(0) = 0$ e implemente a condição $\theta = \omega t$ para escrever a lagrangiana como uma função apenas de q e t . Deduza as equações do movimento de Lagrange para a coordenada q (dica: $T = m/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$).
- (c) Para condições iniciais $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 0$, mostre que:

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2}(\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

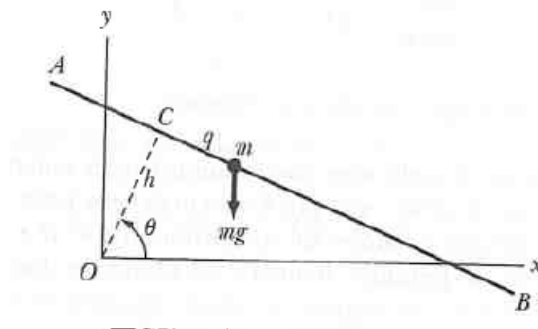


Figura 1: Figura representativa para a partícula na haste rígida.

6 Vínculos para a partícula no cone

Este problema irá lhe ajudar a interpretar o significado físico das forças de vínculo.

Uma partícula de massa m está restrita a mover-se na superfície de um cone de semi ângulo α (veja figura abaixo) e está sob ação da força peso.

(a) Adote coordenadas cilíndricas e escreva a lagrangiana para a partícula. Escreva também o vínculo entre a coordenada z e r .

(b) Escreva as equações de movimento de Lagrange, incluindo o multiplicador de Lagrange.

Suponha que a partícula está em movimento circular uniforme de raio a e $\dot{\phi} = \omega$.

(c) Refresque seu conhecimento de física newtoniana: faça um diagrama das forças que atuam sobre o corpo e determine as componentes N_r e N_z da força normal.

(d) Retorne a suas expressões do item (b). Para movimento circular uniforme, temos $\ddot{r} = \ddot{z} = 0$, $r = a$ e $\dot{\phi} = \omega$. Encontre Q_r e Q_z e veja que as mesmas equivalem, respectivamente, a N_r e N_z . Mostre também que $\vec{Q} = Q_r \hat{r} + Q_z \hat{z}$ é a força normal $\vec{N}$. Perceba que você determinou a força normal sem incluir a mesma explicitamente na lagrangiana!

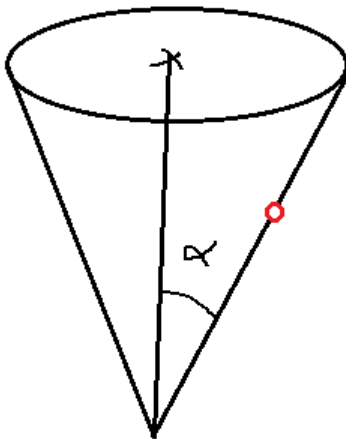


Figura 2: Esquema para a partícula em um cone.

7 Massa suspensa por uma roldana

Um dispositivo para deslocar massas é constituído por um cilindro que gira livremente (sem atrito) ao redor de seu ponto de apoio e libera uma corda (inextensível e de massa desprezível) presa a uma massa M em sua extremidade. O disco possui momento de inércia I ao redor de seu eixo e raio R .

(a) Determine o vínculo entre o deslocamento da massa e o giro do cilindro. Em seguida, escreva a lagrangiana para o problema (dica: use a coordenada x para descrever o deslocamento da massa).

(b) Escreva as equações do movimento de Lagrange na presença do vínculo e determine o multiplicador de Lagrange.

(c) Determine Q_x e Q_θ . Interprete o significado físico de ambas as forças generalizadas.

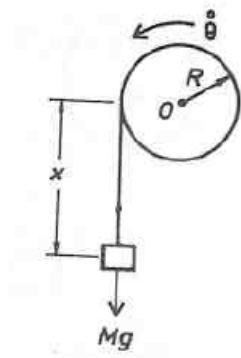


Figura 3: Esquema para os cilindros acoplados.

8 Pêndulo simples

Um corpo de massa m é acoplado a uma haste rígida de comprimento l e massa desprezível. A extremidade livre da haste é fixada a um ponto de apoio, constituindo um pêndulo simples. A lagrangiana deste problema é bem conhecida e se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

(a) Deduza a equação de movimento para θ e determine os pontos de equilíbrio do sistema (dica: em equilíbrio, $\ddot{\theta} = 0$).

(b) Estude a estabilidade da dinâmica do problema ao redor destes pontos (dica: para pequenas oscilações, $\eta = \theta - \theta_0 \ll 1$, onde θ_0 são os ângulos de equilíbrio determinados no item (a)).

(c) Produza um diagrama de fases deste sistema na proximidade destes pontos.

9 Conta no aro

Uma conta move-se livremente (sem atrito) em um aro de raio R . Este aro está acoplado a um eixo vertical e gira ao redor deste eixo com velocidade angular constante ω (veja figura abaixo). Considere desprezível a massa do aro.

(a) Quantos graus de liberdade este sistema possui? Escolha coordenadas generalizadas e escreva a lagrangiana do problema. Determine ainda as equações de movimento de Lagrange. (dica: adote coordenadas esféricas, note que $\dot{\phi} = \omega$ e que $r = R$).

(b) Encontre as posições de equilíbrio da conta. Em particular, mostre que para $\omega^2 < g/R$ há apenas três posições de equilíbrio, enquanto que para $\omega^2 > g/R$ surgem outras duas posições podem ser determinadas (dica: em equilíbrio, $\ddot{\theta} = 0$).

(c) Determine e analise a frequência de pequenas oscilações em torno dos ângulos encontrado no item (b). Em particular, investigue o que ocorre com estas frequência como função de ω : exemplo, ω pode ser arbitrariamente grande? Mostre que há uma velocidade angular crítica $\omega = \omega_c = r/R$ que divide o movimento da partícula em dois regimes *qualitativamente* distintos. Discuta o resultado.

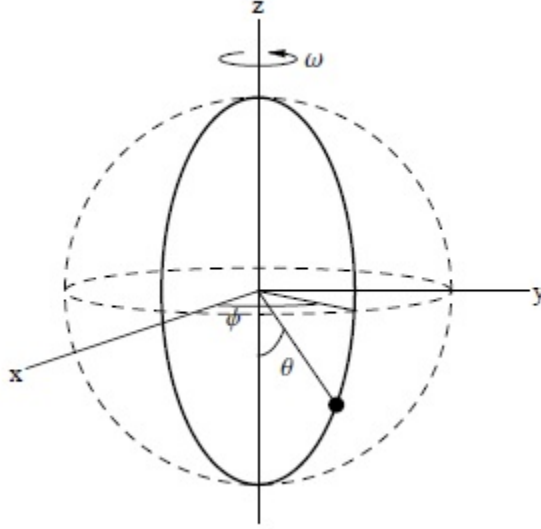


Figura 4: Esquema para o problema da “conta no aro”.

10 Sistema massa mola

Uma partícula de massa m está presa a uma mola ideal (massa desprezível) de constante k . A outra extremidade da mola está fixada a um dispositivo que gira todo o sistema com velocidade angular ω constante ($\dot{\phi} = \omega$). O comprimento da mola quando relaxada é l_0 . Todo o conjunto está apoiado sobre uma mesa.

- Determine a lagrangiana para este problema, a energia total E (lembre que $E = T + U$) e a função energia h . Mostre que $E \neq h$.
- Escreva a equação do movimento para r .
- Mostre que h é constante mas que E não é constante (dica: obtenha uma expressão para $\dot{h}$ e $\dot{E}$ e use o resultado do item (b)).

11 Força dependente do tempo

Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão sob a influência de uma força

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} \exp(-t/\tau)$$

onde k e τ são constantes positivas.

- Encontre as funções lagrangiana e h (função energia) deste sistema.
- Discuta a conservação de energia para este sistema.