

Mec _1Sem2019 - Lista de Exercícios #5 - Dicas e soluções

1 Teoria eletrostática a partir de um princípio variacional

Para resolver este problema, você precisa organizar o esquema da variação para mais de uma *variável independente*. Como fazer? Primeiro, verifique que você entendeu a dedução da fórmula de Euler. Em seguida, escreva a função variada na seguinte forma: $y(x, y, z, \alpha) = y(x) + \alpha(\eta(x) + \eta(y) + \eta(z))$. Faça a variação. Para avaliar o termo que se anula nos extremos (note que o extremo agora é uma superfície!), use a seguinte identidade vetorial: $\nabla \cdot (\vec{A}g) = \nabla \cdot \vec{A} \cdot g + \vec{A} \cdot \nabla g$, no caso do problema sua função g será $g = \eta(x) + \eta(y) + \eta(z)$ e $\vec{A} = \nabla \phi$.

2 Feynman Lectures, Vol II, cap. 19

Ver Feynman Lectures on Physics, Vol II, cap. 19, cuja leitura é altamente recomendada.

3 Partícula em um plano inclinado

(a) Escreva $T = m/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e para U , escreva $U = mgy$. Em seguida: $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$ e migre para coordenadas r e ϕ , lembre-se que $\dot{\phi} = \alpha$. (b) $r(t) = r_0 \cosh \alpha t + \frac{g}{2\alpha^2}(\sin \alpha t - \sinh \alpha t)$

4 Pêndulo em um suporte acelerado

(a) Considere $x = l \sin \phi$ e $y = -l \cos \phi + y_0 + v_{0y}t + at^2/2$ (reflita: a resposta pode depender da escolha para y_0 e v_{0y} ? Siga em frente). (c) Você chega na seguinte equação para ω_0^2 :

$$\begin{cases} \omega_0^2 &= \frac{a+g}{b} \\ \tau_r &= 2\pi/\omega_0^2 \end{cases}$$

5 Partícula em uma haste

(a) Seguindo a dica decompomos a coordenada q : $q_x = q \sin \theta$ e $q_y = -q \cos \theta$, desta maneira: $x = h \cos \theta + q \sin \theta$ e $y = h \sin \theta - q \cos \theta$. (b) Com muita paciência, podemos escrever:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 + (q^2 + h^2)\dot{\theta}^2 - 2q\dot{\theta}h] - mg(h \sin \theta - q \cos \theta)$$

usamos $\theta = \omega t$ e escrevemos as equações do movimento:

$$mq\omega^2 + mg \cos \omega t - m\ddot{q} = 0$$

(c) Observe que a equação é linear e pode ser resolvida com as técnicas desenvolvidas até no curso.

6 Vínculo para a partícula no cone

(a) e (b) A lagrangiana está disponível em notas de aula e foi trabalhada em sala de aula, escrevemos $r \cot \alpha - z = 0$. (c) Existem duas forças sobre a partícula: a normal $\vec{N}$ e o peso $\vec{P}$. Para $\vec{N} = N_r \hat{r} + N_z \hat{z}$, temos: $N_r = -m\omega^2$ e $N_z = mg$, note que $N_r = -N \cos \alpha$ e $N_z = N \sin \alpha$, de maneira que $\tan \alpha = g/a\omega^2$. (d) Usando o item (b) temos: $\lambda = -\tan \alpha m\omega^2$ e $\lambda = -mg$, portanto $\tan \alpha = g/a\omega^2$. E note que $Q_r = \lambda \cot \alpha = -m\omega^2$ e $Q_z = -\lambda = mg$

7 Massa suspensa por uma roldana

(a) Note que $X = R\theta$, $\mathcal{L} = (M/2)\dot{X}^2 + (I/2)\dot{\theta}^2 + MgX$, (b) Por exemplo, para X temos: $Mg - M\ddot{X} + \lambda = 0$ (c) $Q_x = MgI/(I + MR^2)$, é a tensão na massa devido a interação com a corda.

8 Pêndulo simples

(a) Os pontos são (sempre para $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$. (b) Para $\theta = \pm\pi$, lembre-se que $\sin(\eta \pm \pi) = \sin \eta \cos \pi + \cos \eta \sin \pi \approx -\eta$, portanto ficamos com: $ml^2\ddot{\eta} - mg\eta = 0$ e o ponto é instável. (c) Veja suas notas de aula. Os pontos fixos são centros e selas.

9 Conta no aro

Escolhemos θ como o grau de liberdade. Perceba que $\dot{\phi}$ está dada. Este é um tipo de vínculo semi-holonômico que discutimos em sala. No entanto, você pode olhar este problema pragmaticamente, sem pensar nessa questão do vínculo.

(a)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}R^2\sin^2\theta\omega^2 - mgR(1 - \cos\theta)$$

(b) Posição de equilíbrio: escreve-se equação do movimento para θ :

$$mR^2\cos\theta\sin\theta\omega^2 - mgR\sin\theta - mR^2\ddot{\theta} = 0$$

Em equilíbrio $\ddot{\theta} = 0$. Você vai encontrar $\theta = 0$ e $\theta = \pm\pi$ e para $\omega > g/R$ você terá também dois outros ângulos $\pm\theta_0$ tal que $\cos(\pm\theta_0) = g/R\omega^2$ (ver equação acima).

(c) Para pequenas oscilações, use $\eta = \theta - \theta_0 \ll 1$ e lembre-se que:

$$\cos(\eta + \theta_0) = \cos\eta\cos\theta_0 - \sin\eta\sin\theta_0 \approx \cos\theta_0 - \eta\sin\theta_0$$

E algo semelhante para $\sin(\eta + \theta_0)$. Você mostrará que $\theta = \pi$ é instável para qualquer ω , que $\theta = 0$ é estável para $\omega^2 < g/R$ e que θ_0 é estável para $\omega^2 > g/R$. Desta maneira, $\omega_c^2 = g/R$, divide o sistema em dois regimes qualitativamente distintos.

10 Sistema massa mola

(a) $\mathcal{L} = (m/2)\dot{r}^2 + (m/2)r^2\omega^2 - (1/2)k(r - l_0)^2$, $E = T + U$ e tanto T quanto U estão na lagrangiana. A função h pode ser determinada pela definição. Claramente, $h \neq E$. (b) $mr\omega^2 - k(r - l) - m\ddot{r} = 0$ (c) Siga a dica: coloque $\dot{r}$ em evidência e use a expressão do item b.

11 Força dependente do tempo

$U(x) = k/x \exp(-t/\tau)$, determine a lagrangiana ($\mathcal{L} = T - U$) e proceda a partir da definição para encontrar a função energia. A energia não se conserva pois $\mathcal{L}$ depende explicitamente do tempo.