

Mec _1Sem2019 - Lista de Exercícios #6

Lista a ser avaliada por um teste no dia 04.06

- O problema geral das forças centrais
- Problema de Kepler
- Perturbação de órbitas
- Estabilidade de órbitas
- Equações de Hamilton

1 Função $f(r)$

Seja r a coordenada esférica, ou a coordenada polar, prove as seguintes identidades:

- (a) $\nabla r^n = nr^{(n-2)}\vec{r}$
- (b) $\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$
- (c) $\nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$

2 Estudo da trajetória espiral

Considere uma trajetória descrita pela seguinte equação: $r(\phi) = A\phi^2$. Faça um esboço desta trajetória para em seguida responder os itens abaixo:

- (a) Determine a lei da força, $f(r)$, associada a esta trajetória.
- (b) Determine a energia potencial $U(r)$ associada a esta força. Órbitas circulares são possíveis neste caso?
- (c) Para que valores, ou valor exato, de energia você observa a órbita $r(\phi) = A\phi^2$?

3 Excentricidade e velocidade angular

Uma partícula move-se em uma órbita elíptica sujeita a uma força central proporcional ao inverso do quadrado da distância. Mostre que se a razão entre a velocidade angular máxima pela velocidade angular mínima ($\dot{\theta}_{max}/\dot{\theta}_{min}$) desta partícula em sua órbita é igual a n , a excentricidade desta órbita é dada por:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

4 Energia e período da órbita elíptica

Um corpo de massa m encontra-se em órbita elíptica devido a interação com um corpo de massa M e podemos considerar $M \gg m$. Esta órbita possui semi-eixo maior a , semi eixo menor b e a distância focal é c . No afélio e periélio da órbita o corpo tem velocidades (módulo) v_a e v_p , respectivamente. A constante gravitacional vale G . Temos ainda que $l_z > 0$ para o corpo.

(a) Faça um esquema cuidadoso para descrever a órbita do corpo. Inclua a posição do centro de força e um tracejado para a trajetória. Para os instantes nos quais o mesmo se encontra no afélio e periélio, represente os vetores posição, velocidade e aceleração associados. Argumente porque nestes pontos $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{r}$ (use equações).

(b) Escreva uma expressão que relacione a energia total do corpo quando o mesmo se encontra no afélio e no periélio. Faça o mesmo para o momento angular. Enuncie princípios físicos utilizados.

(c) Usando o seguinte resultado para qualquer força central:

$$A = \frac{l_z}{2m}T$$

onde A é a área delimitada pela órbita e T o período da órbita, deduza as seguintes expressões:

$$\begin{cases} T^2 &= 4\pi^2 a^3 / GM \\ E &= -GMm/2a \end{cases}$$

5 Nave espacial

Uma nave espacial está em movimento circular uniforme em órbita devido a interação com uma misteriosa nuvem de gás. Os motores da nave estão desligados e a força que age sobre a mesma é exclusivamente devido esta interação. O comandante da nave observa, para sua surpresa, que a trajetória circular da nave os levará para o centro desta nuvem de gás (veja figura abaixo). O mesmo também observa que o momento angular da nave é constante, e conjectura que a interação é devido uma força central.

(a) Determine a expressão $r(\phi)$ para a trajetória da nave (dica: use um truque similar ao que você usou na lista 1 para estudar a elipse)

(b) Determine a lei da força ($\propto kr^n$, onde k é uma constante) para a interação entre a nave e a nuvem.

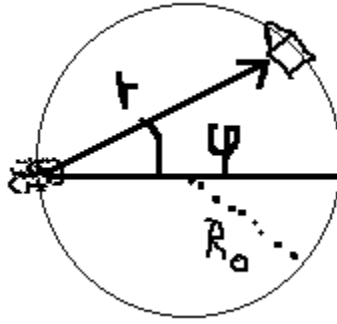


Figura 1: Esquema para a trajetória da nave.

6 Termo cúbico na gravitação

Considere que o termo gravitacional é acrescido de uma pequena perturbação cúbica, de maneira que a componente de força se escreve:

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

com k maior 0 e $|\lambda| \ll l_z^2/m$. Considere a equação para a trajetória orbital devido a forças centrais:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u - \frac{m}{l_z^2 u^2} f(1/u)$$

onde $u = 1/r$.

(a) Resolva a equação da órbita, isto é, encontre $r(\phi)$ (solução geral apenas). Fixe o sistema de coordenadas de maneira que $\phi_0 = 0$.

(b) De quanto deve mudar ϕ para que $r(\phi)$ tenha um período? A órbita será fechada para o presente caso? Determine o avanço angular dos apsidaes com respeito ao caso $\lambda = 0$ (dica: o avanço angular é o período de $r(\phi)$ subtraído de 2π , tente entender o motivo). Discuta o sentido de rotação da órbita com respeito ao sinal de λ . Descreva a órbita em termos gerais.

(c) Repita o item (a) para os casos $\lambda = l_z^2/m$ e $\lambda > l_z^2/m$ e faça uma breve descrição qualitativa da órbita nestes dois casos.

Dica geral: *não se preocupe* com os detalhes da solução para $r(\phi)$: o ponto importante é o *comportamento qualitativo* da órbita.

7 Força central $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$ I

Aprendemos que a deformação da trajetória circular pode ser aproximada, para pequenas deformações, pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{r_0} + a \cos \beta \phi$$

onde β é obtido pela seguinte expressão:

$$\beta^2 = 3 - \frac{u_0}{f_0} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right) \Big|_{u=u_0}$$

onde $u = 1/r$, $u_0 = 1/r_0$ (r_0 é o raio de movimento circular uniforme) e f_0 é igual ao valor de $f(r)$ para $r = r_0$. Uma partícula de massa m está sob ação de uma força central que se escreve $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$, onde $F_0 > 0$ é constante.

(a) Calcule o valor de β . A trajetória é fechada?

(b) Suponha $f(r) = -kr + \delta F_0$, onde δ é uma constante e $|\delta| \ll 1$ e ainda que F_0 é da ordem de kr_0 . Calcule β^2 (suponha r_0 conhecido) para esta força até primeira ordem em δ e discuta o sentido da precessão com respeito ao sinal de δ (dica: você não precisa achar um novo valor de r_0).

(c) Qual o avanço angular desta órbita? *Sugestão: refaça o problema por um segundo método (equação do movimento, por exemplo).*

8 Força central $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$ II

Uma partícula possui momento angular $l_z \neq 0$ e está sob ação de uma força $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$.

(a) Escreva a lagrangiana para descrever a dinâmica da partícula e determine o raio de movimento circular em torno do centro da força (em termos de l_z , F_0 e m).

(b) Analise a estabilidade do movimento circular e determine a frequência de oscilações em torno da órbita circular. Lembre-se que: $(1 + \eta/r'_0)^{-3} \approx 1 - 3\eta/r'_0$.

(c) Analise a órbita de pequenas oscilações: é fechada ou aberta?

9 Potencial de Coulomb blindado

O chamado potencial de Coulomb blindado se escreve:

$$V_B(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = V_B(r) = -g^2 \frac{\exp(-r/r_0)}{r}$$

Esta expressão descreve a interação entre uma carga de prova e uma certa configuração de cargas em uma situação na qual há algum tipo de *blindagem parcial* da carga total envolvida. Nesta expressão, r_0 é uma distância característica do sistema, sem relação com o raio de movimento circular uniforme, e g é uma constante de acoplamento. Considere um elétron de massa m_e sob ação deste potencial, gerado por uma configuração de carga de massa M , onde $M \gg m_e$.

(a) Discuta a massa reduzida do problema. Qual a consequência para a dinâmica do problema se temos $M \gg m_e$? A partir da definição, deduza a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ para este problema e determine a energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$ devido a energia V_B .

(b) Determine l_z (em relação ao centro de massa) de um elétron sujeito a V_B em um movimento circular uniforme de raio a em torno do centro da força. Mostre que l_z é bem definido tanto para o caso $a < r_0$ quanto para $a > r_0$ (dica: perceba que para $r = a$, temos $dV_{eff}(r = a)/dr = 0$).

(c) Determine a energia total E para movimento circular uniforme (dica: lembre-se que $\dot{r} = 0$ para o movimento circular uniforme). Mostre que para $a < r_0$, o movimento circular é para energia negativa e que para $a > r_0$ há movimento circular com energia positiva (lembre ainda de sua discussão sobre a massa efetiva).

(d) Com base nos resultados do item (c), faça um esboço de $V_{eff}(r)$. Lembre-se, você tem dois pontos de equilíbrio! Para qual caso a órbita circular é estável?

(e) Determine a frequência ω_r de pequenas oscilações em torno de $r = a$ para o caso que admite pequenas oscilações.