

Mec_1Sem2019 - Lista de Exercícios #6 - Dicas e soluções

1 Função $f(r)$

Apenas note que $\hat{r} = \vec{r}/r$, para o item (c) pesquise sobre o laplaciano em coordenadas esféricas e note que a parte radial se escreve apenas:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r})$$

2 Estudo da trajetória espiral

(a) Temos $u(\phi) = 1/(A\phi^2)$, de maneira que: $u''(\phi) = 6/(A\phi^4) = 6Au^2$. Substituindo na equação da trajetória temos:

$$6Au^2 = -u - \frac{\mu}{L_z^2 u^2} f(1/u)$$

que nos leva à resposta:

$$f(r) = \frac{L_z^2}{\mu} \left(-\frac{6A}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right)$$

(b) Trabalhando a definição, temos:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r f(r') dr' = \frac{L_z^2}{\mu} \left(-\frac{6A}{3r^3} - \frac{1}{2r^2} \right)$$

órbitas circulares não são possíveis.

(c) Note que $\dot{r} = 2A\phi\dot{\phi} = 2A\phi L_z/\mu r^2$, daí:

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{4A^2 \phi^2 L_z^2}{\mu^2 r^4} \right) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{4AL_z^2}{\mu^2 r^3} \right) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} = \left(\frac{2AL_z^2}{\mu r^3} \right) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

de maneira que:

$$E = T + U = 0$$

apenas para energia total $E = 0$ que teremos esta órbita.

3 Excentricidade e velocidade angular

Considere a equação da órbita e escreva expressões para $\dot{\phi}$ no afélio e periélio da órbita.

4 Energia e período da órbita elíptica

(a) Lembre-se que, em geral, $\vec{r} = r\hat{r}$ e $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$, qual o valor de $\dot{r}$ no afélio e periélio. Uma dica importante é notar que $r_a = a + c$ e $r_p = a - c$. Quando escrever a energia, lembre-se que $\dot{r} = 0$ nos dois pontos considerados

5 Nave espacial

Defina um vetor $\vec{R}_1$ do centro da circunferência para a nave e outro do centro da circunferência para a origem do sistema de coordenadas. Note que $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R_0$, por geometria vetores, perceba que $\vec{R}_1 = \vec{r} + \vec{R}_2$. Proceda para encontrar $r(\phi) = 2R_0 \cos \phi$. (b) a força é $\propto -1/r^5$.

6 Termo cúbico na gravitação

(a) Substitua na equação da órbita e resolva para $u(\phi)$, $u(\phi) = A \cos(\beta\phi) + mk/(l_z^2 - m\lambda)$ onde $\beta^2 = 1 - \lambda m/l_z^2 > 0$. (b) Note que em geral β não será um número racional, portanto a órbita não é fechada. Dado que $T = 2\pi/\beta$ e $\beta \approx 1$, mesmo que β fosse racional a órbita só fecharia depois de muitas e muitas voltas. (c) O período para $\lambda = 0$ é 2π . Como o período será maior para $\lambda < l_z^2/m$, ocorre que o máximo neste caso será em um ângulo $2\pi + \delta$, onde δ é o avanço angular. (d) Em ambos os casos, a órbita colapsa para o centro.

7 Força central $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$ I

(a) Note que $\beta^2 = 3$, a órbita é aberta. (b) De fato: $\beta^2 = 3 + 1/(1 - \delta F_0/kr_0)$, ou ainda: $\beta \approx 2 + \delta F_0/4kr_0$. Analisando a precessão temos: $\delta < 0$, anti-horário e $\delta > 0$, horário. (c) O avanço de cada revolução se escreve:

$$\frac{2\pi}{\beta} - \pi \approx -\frac{\delta F_0}{4kr_0} \pi$$

Portanto, para completar a precessão, a órbita precisa mover-se π (2π seria para o caso gravitacional, por exemplo). Portanto, são necessárias $4kr_0/\delta F_0$ revoluções.

8 Força central $\vec{F} = -F_0 \hat{r}$ II

(a) Deduza que $U(r) = F_0 r$, desta maneira:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 - F_0 r$$

(b) $r_0^3 = l_z^2/F_0 m$, $\omega_0^2 = 3l_z^2/m^2 r_0^4$, (c) $\dot{\phi}_0 = l_z^2/mr_0^2$, desta maneira $\omega_0/\dot{\phi}_0 = \sqrt{3}$, a órbita é aberta.

9 Potencial de Coulomb blindado

(a) $\mu = mM/(m+M) \approx m$ (b)-(c) Lembre-se que a é um dado do problema, portanto pode ser usado na expressão para E e l_z . Use que $V'_{eff}(r=a) = 0$ e $E(r=a) = V_{eff}(r=a)$ para encontrar l_z e E em função dos parâmetros do problema. $L_z^2 = mag^2(1+a/r_0) \exp(-a/r_0)$ e $E = g^2/2a(1+a/r_0-2) \exp(-a/r_0)$, note que para $a < r_0$ temos $E < 0$, etc. (d) Use o mathematica para fazer o gráfico caso lhe pareça muito difícil. Depois, interprete o resultado. (e) Proceda com a segunda derivada de $V_{eff}(r)$. $\omega_0^2 = \exp(-a/r_0)g^2/(a^3 r_0^2)[-a^2 + ar_0 + r_0^2]$