

Mec1_1Sem2019 - Lista de Exercícios #7 (ou adendo à lista 6)

Esta lista é um adendo à lista 6. Esta lista E os problemas da lista 6 serão objeto de avaliação do teste VII dia 13/06.

- Forças centrais
- Lagrangiana de uma partícula carregada no campo EM

1 Termo logarítimo

Suponha que o potencial gravitacional precisa ser modificado de maneira que escrevemos para uma partícula sob ação de uma imensa massa a seguinte expressão:

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \delta \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

onde $\delta > 0$ e δ é um parâmetro pequeno (considere $\delta \ll \frac{k}{r_0}$, onde r_0 é o raio de movimento circular do potencial). Ou seja, suponha que precisamos de um termo logarítimo para o potencial gravitacional (apenas suponha).

(a) Escreva equações de movimento para uma partícula neste potencial e mostre que movimento circular de raio $r = r_0$ é possível.

(b) Investigue se a órbita circular encontrada no item anterior é estável.

(c) Suponha movimento circular uniforme e investigue a relação entre a componente v_ϕ da velocidade em um MCU ($v_\phi = r_0 \dot{\phi}_0$) e r_0 . Faça gráficos de v_ϕ como função de r_0 para $\delta = 0$ e $\delta \neq 0$. Concentre-se no comportamento para r_0 grande. De fato, você deve mostrar que:

$$v_\phi^2 = \frac{k}{mr_0} + \frac{C}{m}$$

Note que para r_0 muito, muito grande, v_ϕ será constante. De fato, observações astronômicas indicam que a velocidade das massas como função da distância r_0 ao centro de suas respectivas galáxias é constante para r_0 muito grande (para r_0 maior que 60 mil anos luz). Este resultado conecta-se com o problema da matéria escura. Aliás, para r_0 pequeno, a velocidade v_ϕ cresce linearmente com o aumento de r_0 , o que também não é previsto pela equação acima. Você saberia formular uma explicação para isto?

2 Campo magnético uniforme

Como demonstrado em aula, a lagrangiana de uma partícula de massa m e carga q em um campo eletromagnético (ver notas de aula em caso de dúvidas), se escreve:

$$\mathcal{L} = T + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - qV(r)$$

onde $V(r)$ é o potencial elétrico, definido pela integral do campo elétrico agindo sobre a partícula, e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor, para o qual $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Considere uma partícula de massa m e carga q sujeita *exclusivamente* a um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$.

(a) Verifique que o potencial vetor $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-B_0 y \hat{i} + B_0 x \hat{j})$ resulta em um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$. Obtenha a lagrangiana para descrever a dinâmica desta partícula.

(b) Determine a hamiltoniana h associada. Verifique se $h = E$ e analise a conservação de E e h (alternativamente, analise o problema em termo da Hamiltoniana $\mathcal{H}$ caso seja de seu interesse).

(c) Escreva equações de movimento (coordenadas x , y e z) e discuta a solução em termos de uma trajetória que inclui movimento circular no plano ou uma hélice em 3D.

3 Partícula no campo eletromagnético

Considere a expressão, demonstrada em aula, para a lagrangiana de uma partícula de massa m e carga q em um campo eletromagnético (ver notas de aula em caso de dúvidas):

$$\mathcal{L} = T + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - qV(r)$$

onde $V(r)$ é o potencial elétrico, definido pela integral do campo elétrico agindo sobre a partícula, e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor, para o qual $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Uma partícula de massa m e carga q está no interior de solenoide de raio R , e está sujeita a um campo elétrico *não uniforme* $\mathbf{E} = (a/r)\hat{r}$ e também a um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$.

(a) Encontre a expressão para a energia potencial devido o campo elétrico $\mathbf{E} = (a/r)\hat{r}$.

(b) Mostre que:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-B_0y\hat{i} + B_0x\hat{j}) = \frac{1}{2}B_0r\hat{\phi}$$

e determine a Lagrangiana $\mathcal{L}$ para descrever a dinâmica desta partícula (use coordenadas cilíndrica como coordenadas generalizadas).

(c) Obtenha as quantidades conservadas. Analise a conservação da componente l_z do momento angular da partícula.

(d) Analise a possibilidade de movimento circular de raio $r = a$ e ainda se a referida órbita é estável.