

MAT0112 - Vetores e Geometria - Lista 1

1. Resolva os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x + y + 3z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y + 3z - 2t = 0 \\ 2x + y - 4z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \\ -4x - 3y + 5z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x - y + 2z + w = 2 \\ 3x + 2y + w = 1 \\ 4x + y + 2z + 2w = 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 6y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 \\ y_1 + 6y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 \\ y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + y_5 = 40 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 = 80 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 6y_5 = 160 \end{cases}$$

2. Que condições devem ser impostas a m , n e p para que o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = m \\ 2x + 6y - 11z = n \\ x - 2y + 7z = p \end{cases}$$

tenha solução?

3. Determine os valores de a , de modo que o seguinte sistema nas incógnitas x , y e z tenha: (a) nenhuma solução, (b) mais de uma solução, (c) uma única solução:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

4. Classifique e resolva o seguinte sistema em função dos valores de a e b :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

5. **(Regra de Cramer 2x2):** Considere o sistema linear 2×2 nas incógnitas x e y :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

onde a, b, c, d, e, f são reais quaisquer. Mostre que:

- (a) Se $ad - bc \neq 0$ então o sistema tem solução única

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

e

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

- (b) Defina $M = ad - bc$. O sistema terá soluções se $M = 0$? Qual a condição para que o sistema tenha infinitas soluções?

6. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, prove que:

(a) a equação $AC = I_n$ pode ser resolvida $\iff$ o sistema linear $AX = B$ tem solução para qualquer B , onde X e B são vetores coluna $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente.

(b) a equação $CA = I$ pode ser resolvida $\iff$ o sistema linear $AX = 0$ tem solução única, onde X é um vetor coluna $n \times 1$.

7. Prove que um sistema homogêneo com mais variáveis do que equações sempre possui infinitas soluções.

8. Assuma que $x_1, x_2, \dots, x_7$ sejam números reais tais que:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 &= 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 &= 12 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 &= 123. \end{aligned}$$

Encontre o valor de $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$.

9. Resolva os sistemas de equações abaixo:

$$(a) \begin{cases} a^2 - 3a - 4b = 5 \\ 8a^2 + a - 9b = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2a^2 - b^2 - c^2 + bc = 1 \\ a^2 - 2b^2 + c^2 + 5bc = 8 \\ 6a^2 + b^2 - 7c^2 - 2bc = 5 \end{cases}$$

Dica: Faça algumas mudanças de variável.

10. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e sejam $C = kA + lB$, $D = rA + sB$, onde k, l, r e s são números reais tais que $ks - lr \neq 0$. Prove que C e D comutam se, e somente se, A e B comutam.

11. Para uma matriz diagonal $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, vamos adotar a notação mais compacta $A = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, onde $x_i = a_{ii}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por exemplo, $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$. Se $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ e $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ são matrizes diagonais, calcule, escrevendo na notação compacta caso o resultado seja uma matriz diagonal, as seguintes expressões:
- (a) $A + B$;
 - (b) AB ;
 - (c) A^n , onde n é um inteiro positivo;
 - (d) A^{-1} , quando A for invertível.
12. Uma matriz quadrada A é dita *idempotente* se $A^2 = A$. Prove que:
- (a) Se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.
 - (b) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = A$ e $BA = B$, então A e B são idempotentes.
 - (c) Se A é idempotente, então $\det(A) \in \{0, 1\}$.
 - (d) Se A é idempotente e 2×2 , então $\text{tr}(A) \in \{0, 1, 2\}$.
13. Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ é dita *nilpotente* se existe um inteiro positivo k tal que $A^k = O_n$, onde O_n denota a matriz quadrada nula $n \times n$.
- (a) Se N é uma matriz nilpotente tal que $N^2 = 0$, prove que $I + N$ é invertível e calcule sua inversa em função de N .
 - (b) Prove que toda matriz triangular tal que todos os elementos de sua diagonal são iguais a zero é nilpotente.
 - (c) Para cada $n \geq 1$, dê exemplo de uma matriz quadrada $n \times n$ nilpotente que não seja triangular.
14. Seja M^T a matriz transposta da matriz M . Prove que $(AB)^T = B^T A^T$.
15. Prove que, se A e B são matrizes simétricas de mesma ordem que comutam, então AB também é uma matriz simétrica.
16. Prove que, para todo número real r ,

$$\begin{pmatrix} r & 1+r \\ 1-r & -r \end{pmatrix}^2 = I.$$

17. Prove que não existe uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
18. Encontre todas as matrizes M tais que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19. Sejam A e B matrizes invertíveis, simétricas e que comutam entre si. Prove que:

- (a) Os seguintes pares de matrizes também comutam: A^{-1} e B , A e B^{-1} , A^{-1} e B^{-1} .
- (b) As matrizes $A^{-1}B$, AB^{-1} e $A^{-1}B^{-1}$ são simétricas.

20. Encontre todas as matrizes diagonais 2×2 que comutam com todas as matrizes 2×2 .

21. Determine, caso exista, a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

22. Sejam E_1 , E_2 e E_3 as matrizes elementares de ordem n obtidas da identidade pelas transformações elementares $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ e $L_i \leftarrow cL_i$, respectivamente, onde $i \neq j$ e $c \neq 0$. Mostre que $E_1^t = E_1$, $E_2^t = E_2'$ e $E_3^t = E_3$, onde E_2' é a matriz elementar obtida da identidade mediante a transformação $L_j \leftarrow L_j + kL_i$.

23. Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 = 0$. Prove que existe uma única matriz real $n \times n$ X que satisfaz a equação $X + AX + XA^2 = A$ e expresse X em função de A .

24. Seja $X = \begin{pmatrix} 3 & x & -2 \\ x-2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, onde $x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(X^2 - 6X + 9I) = 400$. Quais são os possíveis valores de x ?

25. Calcule o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{x^2}{y} & \frac{(x+1)^2}{y^2} & \frac{(x+2)^2}{y^3} \\ \frac{(x+3)^2}{y^4} & \frac{(x+4)^2}{y^5} & \frac{(x+5)^2}{y^6} \\ \frac{(x+6)^2}{y^7} & \frac{(x+7)^2}{y^8} & \frac{(x+8)^2}{y^9} \end{vmatrix},$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e y é não nulo.