

Álgebra Linear - LISTA 1 - Instituto de Física – USP – 2018

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. Considere o conjunto $V = \{f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que a soma de duas funções de V também é membro de V . Mostre que a multiplicação de uma função de V por um número real também é membro de V . Mostre que V é um espaço vetorial. Você é capaz de encontrar alguma função $f_1(x)$, não nula, em V ? Existe alguma outra função $g(x)$ em V que não seja um múltiplo escalar de $f_1(x)$?

2. Considere $V = \mathbb{C}$, o corpo dos números complexos, munido com a soma usual dos números complexos e munido com a seguinte multiplicação por escalar real: se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in V$, então $\lambda \cdot z = 0$. Com essas operações V é um espaço vetorial?

3. Verifique se $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com as operações de adição e de multiplicação por escalar dadas por:

- 1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda y, \lambda x)$
- 2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, y)$
- 3) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1), \quad \lambda \cdot (x, y) = (x, \lambda y)$

4. Seja $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, com as operações de adição e multiplicação por escalares dadas por:

$$x \oplus y = xy, \quad \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Mostre que V é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. É verdade que V coincide com o conjunto

$$S = \{\lambda \cdot 2 : \lambda \in \mathbb{R}\} ?$$

5. Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalares dadas por:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, y^\lambda).$$

- 1) Verifique que W é um espaço vetorial.
- 2) Ache uma base para W .

6. Verifique se S é um subespaço do espaço vetorial V nos seguintes casos:

- 1) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
- 2) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) : x = 0\}$
- 3) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{A \in V : A \text{ tem inversa}\}$
- 4) $V = \mathbb{R}_3[x]$ e $S = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$
- 5) $V = \mathbb{R}_3[x]$ e $S = \{f \in V : f(x) = f(-x)\}$
- 6) $V = \mathbb{R}_3[x]$ e $S = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$
- 7) $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $S = \{f \in V : f''(x) + f'(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

7. Verifique se valem as igualdades abaixo:

- 1) $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] = [(1, 1, 0), (1, -1, 0)]$
- 2) $[\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x] = [1, \sin(2x), \cos(2x)]$
- 3) $[1, x, x^2, x^3] = [1, 1 + x, 1 - x^2, 1 - x - x^2]$

8. Seja $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com a soma usual de funções e o produto usual por escalar. Seja $S = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Mostre que S é um subespaço de V . Você acha que S é “grande” ou “pequeno”, dentro de V ? Prove que dada uma função qualquer $f \in V$, existe uma função $g \in S$ e uma função constante c tal que $f(x) = g(x) + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja V um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial qualquer: a) mostre que o oposto de um elemento qualquer de V é único (o oposto de $u \in V$ é um elemento $v \in V$ tal que $u + v = \vec{0}$). Devido a esse resultado, utilizaremos a notação $-u$ para o oposto de u .

b) Mostre que:

- 1) $0 \cdot u = \vec{0}, \forall u \in V$
- 2) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ então $(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u)$
- 4) Se $\lambda \cdot u = \vec{0}$ então ou $\lambda = 0$, ou $u = \vec{0}$

10. A função e^x é combinação linear das funções $e^{\sin(x)}$ e $e^{\cos(x)}$?

11. A função $\sin(x)$ é combinação linear das funções $\sin(e^x)$ e $\cos(e^x)$?

12. Se $v_1, \dots, v_m$ é um conjunto finito de vetores de um espaço vetorial V , mostre que o conjunto $[v_1, \dots, v_m]$ de **todas** as combinações lineares de $v_1, \dots, v_m$ é um subespaço vetorial de V .

13. Existe algum conjunto finito de polinômios $p_1(x), \dots, p_m(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tal que

$$\sin(x) \in [p_1(x), \dots, p_m(x)] ?$$

14. Se $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ é um conjunto L.I. de polinômios em $\mathbb{R}[x]$, mostre que o seguinte conjunto

$$\{f_1(x)e^x, \dots, f_m(x)e^x\}$$

também é L.I.

15. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ é um conjunto de n números reais distintos, mostre que as funções

$$\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$$

formam um conjunto L.I.

16. Se $p_1(x) = x^3 - x^2 + 10$, $p_2(x) = x^{10} - x + 1$ e $p_3(x) = x^5 - x + 2$, mostre que as funções

$$p_1(x)e^x, p_2(x)e^{2x}, p_3(x)e^{3x}$$

são linearmente independentes.

17. Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau $n \geq 1$, digamos

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um número qualquer fixado. Mostre que existem números reais, $b_n, \dots, b_0$, univocamente determinados, tais que

$$f(x) = b_n(x - x_0)^n + \dots + b_1(x - x_0) + b_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

18. Encontre 3 vetores L.D. no $\mathbb{R}^3$ que são dois a dois L.I.

19. Decida se os seguintes vetores do $\mathbb{R}^6$ são LI ou LD:

$$(1, 1, -1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, -3, 1, 5), (3, 3, -2, 1, -1, -2).$$

20. Considere o subespaço S do $\mathbb{R}^5$ gerado pelos seguintes vetores:

$$v_1 = (1, -1, 0, 1, 2), v_2 = (1, 1, 1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 1, 3, 2), v_4 = (0, 1, 2, 3, 4).$$

Encontre uma base de S que esteja contida no conjunto $\{v_1, \dots, v_5\}$.

21. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz com m linhas e n colunas. Se denotarmos por ℓ_i o vetor do $\mathbb{R}^n$ formado pela i -ésima linha de A e por c_i o vetor do $\mathbb{R}^m$ formado pela i -ésima coluna de A , definimos dois subespaços:

$$\text{Lin}(A) = [\ell_1, \dots, \ell_m] \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{Col}(A) = [c_1, \dots, c_n] \subset \mathbb{R}^m.$$

A dimensão de $\text{Lin}(A)$ é chamada de o *pôsto linha de A* e a dimensão de $\text{Col}(A)$ é chamada de o *pôsto coluna de A* . Prove que o pôsto linha de A é igual ao pôsto coluna de A .

22. Prove ou dê contra-exemplo:

(1) A intersecção de dois subespaços de um espaço vetorial é um subespaço vetorial.

(2) A reunião de dois subespaços de um espaço vetorial é um subespaço vetorial.

23. Dê uma condição que dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V devem satisfazer para que a sua reunião seja um subespaço vetorial de V .