

Álgebra Linear - LISTA 2 - Instituto de Física – USP – 2018

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

1) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é um conjunto L.D. num espaço vetorial V , então cada elemento é combinação linear dos outros.

2) Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. se, e somente se, dois quaisquer dos seus elementos forem L.I.

3) Existe um sistema linear não-homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (onde, como sempre, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) que possui exatamente 80 soluções.

2. Seja $V = \mathbb{R}_4[x]$. Mostre que o conjunto $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é L.I. e complete esse conjunto a uma base de V , onde

$$\begin{aligned}p_1(x) &= 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4 \\p_2(x) &= 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4 \\p_3(x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4\end{aligned}$$

3. Seja V o espaço vetorial das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente deriváveis. O seguinte conjunto de vetores

$$\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$$

é L.I ou L.D? É verdade que $\cos(x) \in [\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)]$?

4. Calcule a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Um estudante percebeu que, escalonando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ou escalonando a matriz transposta A^t ,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

o número de pivôs é o mesmo. Isso é uma coincidência ou sempre acontece?

6. Resolva o sistema linear abaixo, em função do parâmetro λ . Para quais valores de λ o sistema possui solução?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Mostre que existe um único valor λ_0 do parâmetro λ que torna a matriz abaixo não-invertível:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando o que você aprendeu em Cálculo I, calcule λ_0 com duas casas decimais corretas.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Suponhamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ seja um conjunto L.I. Esse conjunto é uma base de V ?

9. Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços vetoriais abaixo:

(a) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = w, \text{ e } x - 3y + w = 0\}$.

(b) $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \text{ comuta com a matriz } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\}$

(c) $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = p(-1) = 0\}$.

10. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$?

11. Sejam S_1 e S_2 dois subespaços do $\mathbb{R}^5$ com $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$. Mostre que $S_1 \cap S_2 \neq \{\vec{0}\}$.

12. Seja S o subespaço das soluções de um sistema linear homogêneo com sete equações e doze incógnitas. Quais os possíveis valores para $\dim S$? Para cada um dos possíveis valores que você encontrou, escreva um sistema cujo espaço de soluções tenha exatamente aquela dimensão.

13. Suponhamos que S_1 seja o conjunto solução do sistema linear não homogêneo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ e que algum $a_i \neq 0$. Suponhamos que S_2 seja o conjunto solução do sistema linear não homogêneo $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = c$ e que algum $b_j \neq 0$. Suponhamos também que $S_1 = S_2$. Mostre que existe uma constante não nula λ tal que:

$$(a_1, \dots, a_n, b) = \lambda(b_1, \dots, b_n, c).$$

14. O que significa o exercício anterior? Você é capaz de generalizá-lo para sistemas com mais de uma equação?

15. Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Encontre uma base e determine a dimensão do subespaço das soluções do sistema.

16. Considere o sistema linear nas variáveis x_1, x_2, x_3 . Ache os valores de a e b para os quais o conjunto solução do sistema:

$$\begin{aligned}ax_1 + bx_3 &= 2 \\ax_1 + ax_2 + 4x_3 &= 4 \\ax_2 + 2z &= b\end{aligned}$$

é: (1) Unitário, (2) Vazio, (3) Infinito.

17. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que o sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

tem solução única. Será que o sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 3\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

tem solução única?

18. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $A \neq -I_n$ e que satisfaz $A^2 + A = 0_n$ (onde 0_n é a matriz nula de ordem n). A matriz A pode ser invertível?