

Álgebra Linear - LISTA 3 - Instituto de Física – USP – 2018

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz tal que existem vetores (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) satisfazendo:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Mostre que A é invertível e encontre A^{-1} .

2. Considere uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais V e W . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. T é injetora.
2. Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LI então $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ é LI.
3. $\ker(T) = \{\vec{0}\}$.

3. Sejam $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente deriváveis e $T: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a transformação linear $T(f) = f'$. Mostre que T é sobrejetora mas não é injetora.

4. Se V for um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, existe alguma transformação linear $T: V \rightarrow V$ que seja sobrejetora mas não seja injetora?

5. Se V for um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, existe alguma transformação linear $T: V \rightarrow V$ que seja injetora mas não seja sobrejetora?

6. Encontre o conjunto de todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = e^{7x}.$$

7. Encontre o conjunto de todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = e^{5x}.$$

8. Encontre o conjunto de todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = xe^{7x}.$$

9. Encontre o conjunto de todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = x^2 e^{7x}.$$

10. Seja $\psi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua exceto no máximo em um número finito de pontos. Encontre todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = \psi(x).$$

[Sugestão: multiplique a equação acima pela função que nunca se anula e^{-5x} . Observe que o lado esquerdo da equação ficou sendo a derivada de um produto de funções.]

11. Consideremos a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Encontre todas as soluções da equação diferencial não homogênea:

$$f'(x) - 5f(x) = H(x).$$

Esboce os gráficos das possíveis soluções.

12. Considere a função $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3)).$$

1. Mostre que T é uma transformação linear.
2. Encontre $\ker(T)$.
3. Encontre $\text{Im}(T)$.
4. Mostre que, dados 4 números reais quaisquer A, B, C, D , existe um único polinômio $p(x)$ de grau ≤ 3 tal que $p(0) = A$, $p(1) = B$, $p(2) = C$ e $p(3) = D$.

13. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2)).$$

1. Encontre $\ker(T)$.
2. Encontre $\text{Im}(T)$.
3. Existe algum polinômio de grau ≤ 3 tal que $p(0) = p(1) = p(2) = 1$ e $p'(1) = 1$?

14. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^5$ definida por

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)).$$

1. Encontre $\ker(T)$.
2. Encontre uma base de $\text{Im}(T)$.
3. Existe algum polinômio $p(x)$ de grau ≤ 3 tal que $p(0) = 0$ e $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 1$?
4. Se um Físico, baseando-se em sua intuição física, acreditasse que um polinômio como no item anterior devesse existir, ele simplesmente iria sentar e chorar?

15. Considere o espaço vetorial

$$V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Fixemos a base ordenada $B = (\sin(x), \cos(x))$ para V . Considere a função $T_\alpha: V \rightarrow V$ definida por

$$T_\alpha(f(x)) = f(x - \alpha),$$

onde α é uma constante real fixada.

1. Mostre que a definição faz sentido, ou seja, que, de fato, $T_\alpha(f(x)) \in V$.
2. Mostre que T_α é uma transformação linear.
3. Encontre $[T_\alpha]_B$.

16. Considere a função $T: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$T(f(x)) = f'(x) - 5f(x).$$

1. Mostre que T está corretamente definida, ou seja, que $T(f)$ está em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sempre que f estiver em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Mostre que T é uma transformação linear.
3. Encontre $\ker(T)$.
4. Mostre que T é sobrejetora.

17. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Sabemos que:

1. $(1, 1, 1) \in \ker(T)$.
2. $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, 0)$ estão em $\text{Im}(T)$.

Encontre $\dim \ker(T)$, $\dim \operatorname{Im}(T)$ e, sabendo-se que $T(1, 2, 3) = (1, 1, 1)$, encontre todas as soluções (x, y, z) da equação:

$$T(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

18. Considere a função $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(p(x)) = (p(1), p'(1), p''(1), p'''(1)).$$

Mostre que T é uma transformação linear. Encontre $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$. Fixando as bases ordenadas $B = (1, x + 2, x^2 - 3x + 2, 2x^3 + x^2 + x + 1)$ e $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, encontre $[T]_{B,C}$. Se, em vez da base B utilizássemos a base $D = (1, (x - 1), (x - 1)^2, (x - 1)^3)$, como ficaria $[T]_{D,C}$?

19. Seja $T: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ a função definida por:

$$T(p(x)) = p(x + 1),$$

Mostre que T é uma transformação linear injetora e sobrejetora. Se fixarmos a base usual $B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, encontre $[T]_B$. Se $C = (1, (x + 1), (x + 1)^2, \dots, (x + 1)^n)$, encontre $[T]_{B,C}$.

20. Considere fixados os números reais a e b , onde $b \neq 0$. Defina a seguinte transformação linear $T_{a,b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$T_{a,b}(x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

1. Encontre $[T]_C$, onde $C = (e_1, e_2)$ é a base ordenada canônica.
2. Se $a = b = 1$, descubra como se comportam os iterados de $v = (1, 0)$, ou seja,

$$v, T_{1,1}(v), T_{1,1}^2(v), \dots, T_{1,1}^n(v), \dots$$

onde $T^2(v) = T(T(v))$ e assim por diante.

3. Se $a = 0$ e $b = 1$, faça a mesma coisa, onde $v = (1, 0)$.
4. Considere a função $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi(x, y) = x + iy$. Mostre que ϕ é uma transformação linear bijetora entre $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais.
5. Usando ϕ e ϕ^{-1} , encontre a função composta

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_{a,b}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$$

e mostre que aplicar $T_{a,b}$ no vetor (x, y) corresponde a multiplicar o número complexo $x + iy$ por $a + bi$.

6. Como o item anterior pode ser aplicado para explicar o comportamento dos iterados nos itens 2 e 3?
7. Se $a^2 + b^2 < 1$, como ficam os iterados de um ponto (x, y) qualquer?

21. Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (x + y, y).$$

Esse operador é diagonalizável?

22. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador cujo polinômio característico é:

$$p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^n.$$

Suponhamos que T seja diagonalizável. Calcule $T(1, 2, 3, \dots, n)$.

23. Para cada $n \geq 2$ dê um exemplo de um operador $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo polinômio característico seja $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ e que não seja diagonalizável.

24. Para cada $n \geq 2$ dê um exemplo de um operador $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo polinômio característico seja $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^n$, que não seja diagonalizável e tal que $\dim V(1) = 1$.

25. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador tal que $p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Esse operador é diagonalizável? Generalize!

26. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador tal que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se $v_0 \in \mathbb{R}^3$ e definirmos a órbita de v_0 como sendo o conjunto dos iterados

$$\{v_0, T(v_0), T^2(v_0), T^3(v_0), \dots\},$$

onde $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (a composta de T com ela mesma k vezes.), esboce as possíveis órbitas de todos os $v_0 \in \mathbb{R}^3$.