

Álgebra Linear - LISTA 4 - Instituto de Física – USP – 2015

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. Considere os espaços vetoriais de dimensão finita V , W e U e as transformações lineares $T: V \rightarrow W$ e $G: W \rightarrow U$.

1. Prove que a função composta $(G \circ T): V \rightarrow U$, definida por:

$$(G \circ T)(v) = G(T(v))$$

é uma transformação linear.

2. Fixemos as bases B , C e D , respectivamente, de V , W e U . Mostre que:

$$[G \circ T]_{B,D} = [G]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

3. Em particular, se L é um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \rightarrow V$ é um operador linear, mostre que

$$[T^m]_B = [T]_B^m,$$

onde B é uma base qualquer de L e $T^m = T \circ T \circ \dots \circ T$ (m vezes).

4. Com a notação do item anterior, se C for outra base de L , mostre que existe uma matriz invertível M tal que

$$[T]_C^m = M[T]_B^m M^{-1}.$$

2. Considere o subconjunto $\mathfrak{F}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ definido por:

$$\mathfrak{F} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : a_{k+1} = a_k + a_{k-1}, \quad k \geq 1\}.$$

1. Prove que $\mathfrak{F}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^\infty$.

2. Exiba uma base de $\mathfrak{F}$.

3. Encontre todos os elementos $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ de $\mathfrak{F}$ tais que a sequência $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica.

4. Exiba uma base de $\mathfrak{F}$ cujos vetores satisfazem a propriedade do item anterior.

5. A sequência de Fibonacci é $\mathfrak{f} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots) \in \mathfrak{F}$. Se $\mathfrak{f} = (a_0, a_1, \dots)$, mostre, usando os itens anteriores, que para todo $k \geq 0$,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}$$

3. Seja $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ o operador linear $T(p) = p'$ (o operador derivação). Defina $G: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ assim:

$$G(p(x)) = \int_0^x p(t) dt.$$

1. Mostre que G é um operador linear (um operador integração).
2. Se $B = (1, x, x^2)$ e $C = (1, x)$ são as bases de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_1[x]$, respectivamente, encontre $[T]_{B,C}$ e $[G]_{C,B}$.
3. Mostre que $T(G(p)) = p$, para todo $p \in \mathbb{R}_1[x]$.
4. Mostre que $G(T(p)) = p(x) - p(0)$, para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.
5. Verifique os dois itens anteriores utilizando coordenadas nas bases fixadas.
6. Se derivação e integração são operações inversas, como você explica o motivo pelo qual $G(T(p)) \neq p$?

4. Considere a sequência de Fibonacci $\{a_n\}$, onde $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, para todo $k \geq 1$ e $a_0 = a_1 = 1$. Assim, obtemos a sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Introduzindo uma variável auxiliar, $b_n = a_{n-1}$, podemos reescrever a lei geradora da sequência de Fibonacci assim:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Com a notação matricial podemos escrever, para todo $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que, para todo $n \geq 1$, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, x)$. Mostre que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde C é a base ordenada canônica do $\mathbb{R}^2$. Mostre que, se B for outra base ordenada do $\mathbb{R}^2$, existe uma matriz invertível M tal que

$$[T]_C^n = M[T]_B^n M^{-1}.$$

Prove que T é um operador diagonalizável, descreva o sistema dinâmico (1) na base que diagonaliza o operador e dê outra prova da fórmula do último item do Exercício 2.

4. Encontre todas as soluções do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + 6x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 7x_2(t) + 2x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_3(t)\end{aligned}$$

com as condições iniciais $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 2$.

5. Encontre todas as soluções do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -25x_1(t) - 12x_2(t) + 18x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 47x_1(t) + 24x_2(t) - 28x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -20x_1(t) - 10x_2(t) + 12x_3(t)\end{aligned}$$

com as condições iniciais $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -16$ e $x_3(0) = 7$.

6. De um operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sabe-se que, na base ordenada canônica C ,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Encontre todos os valores do parâmetro a (caso existam) tais que o operador fique diagonalizável.

7. Sejam V um espaço vetorial n -dimensional e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Vamos definir duas quantidades associadas a T , o traço de T e o determinante de T , da seguinte maneira: fixa-se uma base B qualquer de V e, se $[T]_B = (a_{ij})$, então

$$\begin{aligned}\text{Tr}(T) &= a_{11} + \cdots + a_{nn} \\ \det(T) &= \det[T]_B\end{aligned}$$

Mostre que essa definição faz sentido, ou seja, que os valores definidos não dependem da particular base B escolhida.

8. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear. Mostre que:

1. Se $\text{Tr}(T)^2 > 4 \det(T)$ então T é diagonalizável.
2. Se $\text{Tr}(T)^2 < 4 \det(T)$ então T não é diagonalizável.
3. Se $\text{Tr}(T)^2 = 4 \det(T)$ podem ocorrer as duas situações.

9. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

com a condição inicial $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ e $y_3(0) = -1$. O operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido pela multiplicação da matriz do sistema acima é diagonalizável?

10. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de $M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma *matriz triangular superior* se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$. Se $\mathbf{y} = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior, é possível resolver o sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \quad ?$$

11. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por:

$$T(x, y, z) = (z, y, x), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se $C = (e_1, e_2, e_3)$ denota a base canônica do $\mathbb{R}^3$, então:

1. Encontre $[T]_C$.
2. Ache $p_T(\lambda)$ e os autovalores de T .
3. Encontre uma base B onde $[T]_B$ é diagonal.
4. Encontre $[T]_B$.

12. Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador definido por:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1), \quad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Se $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ denota a base canônica do $\mathbb{R}^4$, então:

1. Encontre $[T]_C$.
2. Ache $p_T(\lambda)$ e os autovalores de T .
3. Encontre uma base B onde $[T]_B$ é diagonal.
4. Encontre $[T]_B$.

13. Suponhamos que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador linear definido por:

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dizemos que T é **superiormente triangularizável** se existir uma base ordenada B do $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz $[T]_B$ seja triangular superior (veja a definição de matriz triangular superior no Exercício 10.). Mostre que se T for superiormente triangularizável, então todas as raízes do polinômio característico $p_T(\lambda)$ são reais e, consequentemente,

$$p_T(\lambda) = (\mu_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\mu_k - \lambda)^{n_k},$$

onde $\mu_j \in \mathbb{R}$ e $\mu_i \neq \mu_j$ se $i \neq j$. Ou seja: uma condição necessária para um operador T ser superiormente triangularizável é que todas as raízes do seu polinômio característico sejam reais.

14. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que o subespaço S de V é um subespaço **T -invariante** se para qualquer $w \in S$ tivermos que $T(w) \in S$. Encontre todos os subespaços T -invariantes do operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, y)$.

15. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T: V \rightarrow V$ um operador linear e S um subespaço T -invariante de V . Considere a restrição do operador T ao subespaço S :

$$T|_S: S \longrightarrow S, \quad (T|_S)(w) := T(w).$$

Mostre que a restrição $G = (T|_S)$ é um operador linear.

16. [Desafio] Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T: V \rightarrow V$ um operador linear e S um subespaço T -invariante de V . Considere a restrição do operador T ao subespaço S :

$$T|_S: S \longrightarrow S, \quad (T|_S)(w) := T(w).$$

Se T for um operador diagonalizável em V , mostre que $T|_S$ será um operador diagonalizável em S .

17. [Desafio] Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T: V \rightarrow V$ um operador linear e S um subespaço T -invariante de V . Considere a restrição do operador T ao subespaço S :

$$T|_S: S \longrightarrow S, \quad (T|_S)(w) := T(w).$$

Assumindo o seguinte resultado sobre determinantes, a saber:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}),$$

onde $\mathbf{A}$ é um bloco $m \times m$, $\mathbf{B}$ é um bloco $k \times k$, $\mathbf{C}$ é um bloco $m \times k$ e $\mathbf{0}$ é um bloco nulo $k \times m$, prove que

$$p_T(\lambda) = p_{(T|_S)}(\lambda) \psi(\lambda),$$

ou seja, o polinômio característico do operador $T|_S$ é um divisor do polinômio característico de T .

18. [Desafio] Suponhamos que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador linear definido por:

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $p_T(\lambda) = (\mu_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\mu_k - \lambda)^{n_k}$, onde $\mu_j \in \mathbb{R}$ e $\mu_i \neq \mu_j$ se $i \neq j$. Existe alguma base ordenada B do $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz $[T]_B$ seja triangular superior?

[Sugestão: prove por indução na dimensão $n = \dim V$. Prove inicialmente para $n = 2$ (o caso $n = 1$ é muito sem graça!). A Hipótese de indução é: se S é um espaço vetorial de dimensão $\leq (n-1)$ e $G: S \rightarrow S$ for um operador linear tal que todas as raízes de $p_G(\lambda)$ são reais, então G é superiormente triangularizável. Se V for um espaço de dimensão n e μ_1 for um autovalor de T , considere $S = \text{Im}(T - \mu_1 I)$. Prove que S é T -invariante e que $\dim S \leq n-1$. Use o Exercício 17 para ter informações sobre o polinômio característico de $T|_S$. Use a hipótese de indução para conseguir uma base $(s_1, \dots, s_k)$ de S onde a matriz de $T|_S$ seja triangular superior. Complete essa base a uma base de V : $B = (s_1, \dots, s_k, v_1, \dots, v_t)$. Mostre que essa base faz o serviço!]