

Álgebra Linear - LISTA 5 - Instituto de Física – USP – 2018

Prof. Paulo Agozzini Martin

1. Seja $V = \mathbb{R}[x]$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais. Considere a função:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

1. Mostre que essa função define um produto interno em V .
2. Calcule o ângulo entre $p(x) = x + x^3$ e $q(x) = x^2 - x^4$.
3. Se $P = \{p(x) \in V : p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ (i.e., P é o conjunto dos polinômios pares), mostre que P é um subespaço vetorial de V .
4. Se $I = \{p(x) \in V : p(-x) = -p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ (i.e., I é o conjunto dos polinômios ímpares), mostre que I é um subespaço de V .
5. Mostre que $P \cap I = \{\vec{0}\}$ e que todo vetor p de V se escreve de modo único como $p = u + v$, onde $u \in P$ e $v \in I$.
6. Se P é o subespaço de V constituído de todos os polinômios pares, encontre $P^\perp$.

2.] Seja $V = \mathbb{R}[x]$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais. Considere a função:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

1. Mostre que essa função define um produto interno em V .
2. Calcule o ângulo entre $p(x) = x + x^3$ e $q(x) = x^2 - x^4$.
3. **[Desafio]** Se P é o subespaço de V constituído de todos os polinômios pares, encontre $P^\perp$.
4. Como explicar isso?

3. Mostre que, para todo $n \geq 1$, temos:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & \cdots & 1/(2n+1) \\ 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/9 & \cdots & 1/(2n+2) \\ 1/5 & 1/7 & 1/9 & 1/11 & \cdots & 1/(2n+5) \\ 1/7 & 1/9 & 1/11 & 1/13 & \cdots & 1/(2n+7) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/(2n+1) & 1/(2n+3) & 1/(2n+5) & 1/(2n+7) & \cdots & 1/(4n+1) \end{pmatrix} \neq 0.$$

4. Considere o espaço vetorial $V = [e^x, 1, x, x^2, x^3, x^4]$ (que é um subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), onde definimos:

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f^{(1)}(0)g^{(1)}(0) + \cdots + f^{(k)}(0)g^{(k)}(0),$$

para certo natural $k \geq 1$.

1. Qual o menor $k \geq 1$ que torna essa função um produto interno em V ?
2. Para esse valor de k que você encontrou acima, encontre o polinômio $u_0(x)$ de grau ≤ 4 que melhor aproxima e^x na métrica derivada do produto interno.
3. Calcule $\|e^x - u_0(x)\|$ e interprete esse valor.

5. Considere o espaço vetorial $V = [e^x, 1, x, x^2, x^3, x^4]$ (que é um subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), onde definimos:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

1. Mostre que essa função define um produto interno em V .
2. Ache uma base ortonormal do subespaço $S = [1, x, x^2, x^3, x^4]$.
3. Encontre a projeção ortogonal $p_0(x)$ de e^x em S .
4. Em que sentido $p_0(x)$ é a melhor aproximação para e^x ?
5. Calcule $\|e^x - p_0(x)\|$ e interprete esse valor.

6. Considere a seguinte função $f(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x, y, z) = (1 - x - y + z)^2 + (2 - x + y - z)^2 + (3 - x - 2y - 2z)^2 + (4 - x - 3z)^2.$$

Mostre que existe um único ponto de mínimo de f em todo $\mathbb{R}^3$ e encontre-o, usando álgebra linear.

7. Considere a seguinte função $f(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y, z) = \int_0^1 (e^t - x - yt - zt^2)^2 dt.$$

Mostre que existe um único mínimo absoluto de f em $\mathbb{R}^3$ e encontre-o, usando álgebra linear.

8. Determine

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

9. No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, definimos a seguinte função

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 10x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

1. Mostre que essa função define um produto interno em V .
2. Calcule $\| (1, 1, 0) \|$ e $\| (1, 1, 1) \|$.
3. Encontre o ângulo entre os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.
4. Encontre uma base ortogonal de V .
5. Encontre o vetor de $S = [e_1, e_2]$ que é mais próximo de $e_3 = (0, 0, 1)$.

10. São dados quatro intervalos fechados $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [2, 3]$, $I_3 = [4, 5]$ e $I_4 = [6, 7]$ que fazem parte de uma barra $[0, 7]$ e uma função temperatura $T: [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ nessa barra. Sabe-se que em cada subintervalo I_j a temperatura média vale $\bar{T}_j$ e que, se $i \neq j$, $\bar{T}_i \neq \bar{T}_j$. Será que existe um polinômio de grau ≤ 3 que pode representar essa função temperatura?

11. Prove a seguinte desigualdade:

$$\sqrt{5}\sqrt{7} + \sqrt{3}\sqrt{13} + \sqrt{23}\sqrt{41} \leq (\sqrt{5+3+23})(\sqrt{7+13+41}).$$

12. Prove a seguinte desigualdade:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(4\pi^2 - x^2)(2 - \sin(x))} dx \leq \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}.$$

No Wolfram, a integral deu 41.628 e o lado direito da desigualdade deu 45.5858]

13. Considere os seguintes pontos no $\mathbb{R}^2$:

$$(0, 1), (1, \sqrt{2}), (2, \pi).$$

1. Existe algum polinômio de grau ≤ 2 que **passa** por esses pontos?
2. Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que melhor se ajusta aos pontos dados.

14. Considere o seguinte sistema linear não homogêneo:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= 1.5 \end{aligned}$$

Mostre que ele não possui solução e encontre a melhor solução aproximada. Calcule o erro.

15. Considere $V = \mathbb{R}^3$ munido com a função

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 0.01x_1y_1 + 100x_2y_2 + 0.01x_3y_3.$$

1. Mostre que se trata de um produto interno.

2. Encontre uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ em relação a esse produto interno.

16. Considere $V = \mathbb{R}^3$ e três vetores LI dados $\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$. Existe algum produto interno no $\mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tal que esses três vetores dados sejam uma base ortonormal? Se existir, calcule

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle .$$