

**LISTA 6 - ÁLGEBRA LINEAR - INSTITUTO DE FÍSICA -USP -
2018**

PROF. PAULO A. MARTIN

1. Seja $V = [e^x, 1, x, x^2]$, subespaço de $\mathcal{C}^0([0, 1])$. Vamos munir V com o produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \{f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\} dx.$$

- (1) Mostre que, de fato, $\langle, \rangle$ é um produto interno em V .
- (2) Encontre a parábola que melhor aproxima e^x , relativamente a esse p.i.
- (3) Encontre a parábola que melhor aproxima e^x relativamente ao produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

2. Considere o subespaço $V = [e^x, 1, x]$, subespaço de $\mathcal{C}^0([-\varepsilon, \varepsilon])$, onde $\varepsilon > 0$. Vamos colocar em V o produto interno

$$\langle f, g \rangle_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)g(x)dx.$$

- (1) Calcule o polinômio de grau ≤ 1 , $p_\varepsilon(x)$, que melhor aproxima e^x , em relação a $\langle, \rangle_\varepsilon$.
- (2) Mostre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x) = 1 + x$.
- (3) Que diabos isso significa? Parece que o Henrico tinha razão: o limite parece ser o polinômio de Taylor!
- (4) Será verdade que, se $f(x):]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ for derivável (quantas vezes se queira!) teremos

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx \rightarrow f(0), \quad \frac{3}{2\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} xf(x)dx \rightarrow f'(0) \quad \text{????}$$

- (5) No caso $V = [e^x, 1, x, x^2]$ a coisa funciona? (Sugestão: ortogonalize a base antes!) Afinal, o Henrico tinha ou não razão?
- (6) Se, no lugar de e^x tivéssemos $|x|$, quais seriam as respostas?
- (7) Será que podemos definir a derivada generalizada no ponto $x = 0$, de uma função contínua $f(x)$ em $] -1, 1[$ como

$$f'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{2\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} xf(x)dx \quad \text{????}$$

- (8) Se $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $f(x) = x$ para $x \geq 0$ então $f(x)$ é contínua e não derivável (no sentido usual) em $x = 0$. Ela é derivável no sentido generalizado, em $x = 0$. Calcule $f'(0)$. O que você achou disso?
- (9) Considere $f(x):]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ a seguinte função contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule (caso exista!) a derivada generalizada $f'(0)$. Compare os itens (8) e (9) e faça uma crítica a essa proposta de derivação!

- 3.** Encontre a parábola que melhor aproxima os pontos obtidos experimentalmente:

$$(-1, 1), (0, -1), (1, 1), (2, 2).$$

Calcule o erro

- 4.** Considere a lista experimental de pontos abaixo:

$$(-1, 1), (0, 1/2), (0, -1/2), (1, 1).$$

Colocando no $\mathbf{R}^2$ a distância definida por:

$$d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|,$$

encontre a parábola que melhor aproxima esses pontos (se existir!). Existe algum produto interno no $\mathbf{R}^2$ do qual essa distância seja derivada? E se em vez de minimizar essa distância quiséssemos minimizar a distância:

$$d_1((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} ?$$

- 5.** Seja V um espaço vetorial n -dimensional ($n \geq 1$) e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base ordenada (qualquer) de V e $A = [T]_B$, pensamos na matriz A como o operador $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ (dado pela multiplicação pela matriz A). Suponhamos que existam dois vetores L.I. no $\mathbf{R}^n$, $\{u, v\}$ tais que:

$$Au = au + bv, \quad Av = cu + dv,$$

para certos escalares a, b, c, d, e . Prove que existem dois vetores L.I. em V que geram um subespaço T -invariante de V .

- 6.** Seja V um espaço vetorial n -dimensional ($n \geq 1$) e $T: V \rightarrow V$ um operador linear tal que o seu polinômio característico $p_T(\lambda)$ possui uma raiz complexa não real $a + bi$ ($b \neq 0$). Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ for uma base ordenada qualquer de V e $A = [T]_B$, use o fato de que $\mathbf{R} \subset \mathbb{C}$ e, conseqüentemente, $\mathbf{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, para pensar o operador multiplicação por A *complexificado*, ou seja: $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Mostre que existe $\varphi \in \mathbb{C}^n$, não nulo, tal que $A\varphi = (a + ib)\varphi$. Escreva $\varphi = u + iv$, onde $u, v \in \mathbf{R}^n$ e mostre que

$$Au = au - bv, \quad Av = bu + av.$$

Use o exercício anterior para provar que em V existe um subespaço T -invariante W de dimensão 2. Prove que o polinômio característico da restrição $T|_W: W \rightarrow W$ tem raízes $a \pm bi$.

7. Seja V um espaço vetorial n -dimensional ($n \geq 1$) com produto interno $\langle, \rangle$ e $T: V \rightarrow V$ um operador linear auto-adjunto. Usando o exercício anterior, mostre que todas as raízes do polinômio característico $p_T(\lambda)$ são reais.

8. Considere a matriz abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prove que existe uma base ortonormal do $\mathbf{R}^4$ (relativamente ao produto interno usual!) onde o operador multiplicação por B é representado por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

[Sugestão: não faça contas!]

9. No espaço $M_n(\mathbf{R})$ considere os seguintes subconjuntos:

$$S_n = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^t = A\}$$

$$A_n = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^t = -A\}$$

- (1) Mostre que S_n e A_n são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbf{R})$.
- (2) Calcule $\dim S_n$ e $\dim A_n$.
- (3) Mostre que $M_n(\mathbf{R}) = S_n \oplus A_n$.

10. Considere a função $T: M_n(\mathbf{R}) \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ definida por $T(A) = A^t$.

- (1) Mostre que T é um operador linear.
- (2) Mostre que T é um operador diagonalizável.
- (3) Encontre o polinômio característico de T .

11. [Desafio] Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $T: V \rightarrow V$ um operador linear diagonalizável. Se W for um subespaço T -invariante de V , decida se a restrição $T|_W: W \rightarrow W$ é diagonalizável, em geral.

12. Sejam $V = \mathbf{R}_n[x]$, $W = \mathbf{R}_m[y]$ e $V \otimes W = \mathcal{L}(V, W)$, o conjunto de todas as transformações lineares de V em W . Será que existe um modo natural de pensar em $V \otimes W$ como $\mathbf{R}_{n,m}[x, y]$, o espaço vetorial de todos os

polinômios em duas variáveis x e y , de grau no máximo n em x e grau no máximo m em y ?