

LISTA IV
CÁLCULO III
IF - USP - 2018

- Calcule a área de um disco qualquer e de uma elipse qualquer.
- Calcule as três integrais a seguir invertendo a ordem de integração (caso você achar que isto vai ser necessária).
 - $\int_0^1 \int_{y/2}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx dy$
 - $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot \sin x dx dy$
 - $\int_0^2 \int_{x^2/2}^2 \sqrt{y} \cos y dy dx$
- Calcule o volume de um elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ usando uma integral tripla.
- Calcule o volume do tetraedro com vértices em $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$.
- Calcule o volume do sólido limitado pelo plano-xy e o gráfico da função $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$.
- Calcule o volume do sólido delimitado pelas superfícies a seguir no primeiro quadrante: $S_1: z = 1 - y$ e $S_2: z = 1 - x^2 - y^2$.
- Determine quais dos conjuntos abaixo têm conteúdo nulo.
 - A é um conjunto finito.
 - $\mathbb{Z}$
 - $\mathbb{Q}$
 - Uma elipse
 - O conjunto vazio
 - O gráfico da função $f(x) = e^{x^2} + \cos(\sin x)$
- Seja $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Calcule a integral da função sobre o domínio dado.
- Explique por que as funções abaixo são integráveis a Riemann no domínio dado.
 - $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 1$ e $\Omega = B_1((0,0))$.

- ii. $f(x, y) = 1$, se $y \geq 0$, $f(x, y) = -1$, caso $y < 0$ e $\Omega = B_1((0,0))$.
10. Seja $\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcule a integral dupla das funções a seguir sobre Ω : $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = xy^2$ e $h(x, y) = \frac{1}{x+y}$
11. Calcule a integral dupla nos casos abaixo
- $f(x, y) = x \cos(y)$ e $\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, x^2 \leq y \leq \pi\}$
 - $f(x, y) = y^3 e^{xy^2}$ e $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$
 - $f(x, y) = x$ e $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \cos(x) \leq y \leq 1 - \cos(x)\}$
12. Calcule o volume dos sólidos de $\mathbb{R}^3$ dados pelas equações abaixo.
- $x^2 + y^2 \leq 1, x + y + z \leq 4, z > 0$
 - $x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq z \leq x + y + 1$
13. Calcule as integrais triplas abaixo.
- $f(x, y, z) = xyz, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$
 - $f(x, y, z) = x^2 + z^2, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

**Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas.
Não deixe de frequentar à monitoria e às aulas de monitoria.**

14. Calcule a massa do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ cujo densidade num ponto é dado por $\delta(x, y, z) = x^2$.
15. Calcule a massa do triangulo com vértices nos pontos $(0,0), (0,3), (2,3)$ e densidade dado por $\delta(x, y) = 2x + y$.
16. Calcule a massa do cone sólido $0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ sabendo que a sua densidade num ponto p é proporcional à distancia de p ao eixo- z .
17. No livro texto que você escolheu, procure as formulas para calcular o centro de massa de objetos no plano e no espaço.
18. Calcule as integrais triplas abaixo.
- $f(x, y, z) = x$ e $x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, x + y \leq z \leq x + y + 1$
 - $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z^2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

19. Calcule as integrais duplas descritas a seguir.
- $f(x, y) = x^2 + y^2$ no disco de raio 2 centrado na origem do plano.
 - $f(x, y) = \sin(4x^2 + y^2)$ na região $4x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$.
 - $f(x, y) = x^2 + y^2$ no anel centrado na origem e raio interno 1 e raio externo 2.
20. Calcule $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$
21. Calcule a integral tripla da função $f(x, y, z) = x^2 y$ primeiro na esfera centrada na origem e raio R e depois no cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.
22. Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y)$ no paralelogramo com vértices $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$.
23. Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ na região do primeiro quadrante limitado pelo gráfico da função $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
24. Calcule a integral da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre o disco unitário centrado na origem.
25. Calcule o volume do sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
26. Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = (x + y)^3$ no paralelogramo de vértices $(1, 0), (1, 2), (2, 1), (0, 1)$.

Respostas e sugestões

Abaixo você encontra respostas e sugestões de todos os exercícios. Algumas respostas são dadas de forma que dá para continuar resolvendo os exercícios pois se reduzem a integrais vistos no curso de Cálculo I. Outras são quase a solução completa do exercício. Utilize as sugestões apenas se não conseguir avançar na resolução do exercício.

- $\pi R^2, \pi ab$. Para o círculo basta usar coordenadas polares e o Teorema de Mudança de Variáveis. Para a elipse, note que você pode supor que seja dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Faça a mudança de variáveis $\frac{x}{a} = \rho \cos(\theta), \frac{y}{b} = \rho \sin(\theta)$. Calcule a Jacobiana da mudança tomando cuidado para escrever

primeiramente $x = x(\rho, \theta)$, $y = y(\rho, \theta)$: veja que temos $x = a\rho \cos(\theta)$, $y = b\rho \sin(\theta)$. A matriz jacobiana é

$$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -a\rho \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & b\rho \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

A jacobiana é o determinante desta matriz que é $ab\rho$. Note que $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Aplique o Teorema de Mudança de Variável e depois o Teorema de Fubini para terminar o exercício.

2. (a) $1 - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ (este foi totalmente resolvido em aula), (b) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$,
(c) $\int_0^2 t \cos(t) dt$ (Esta integral se resolve utilizando integração por partes. Este exercício foi totalmente feita na aula de exercícios para relembrar como fazer isto.). Refizemos todos os itens na aula de exercício do dia 16.05.2018 e fizemos correções nas respostas.

3. $\frac{4\pi abc}{3}$ (Proceda como no primeiro exercício mas agora utilizando a Mudança de Coordenadas Esféricas). O que você tem que fazer é fazer a mudança

$$\frac{x}{a} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \frac{y}{b} = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \frac{z}{c} = \rho \cos(\varphi). \text{ Disto você obtém}$$

$$x = a\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), y = b\rho \sin(\theta) \sin(\varphi), z = c\rho \cos(\varphi)$$

Assim como foi feito no exercício 1, calcule a matriz jacobiana e depois o seu determinante. Aplique o Teorema de Mudança de Variável e depois o Teorema de Fubini. O resultado da jacobiana é abc vezes a jacobiana da coordenada esférica.

4. Se reduz à integral dupla de $f(x, y) = 2 - x - 2y$ sobre o triângulo com vértices $(0,0), (2,0), (0,1)$. Descreva este triângulo e integre a função: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$ e integre usando o Teorema de Fubini.
Note que não é necessário usar integrais para obter este volume porém uma outra solução não é interessante para o curso de Cálculo III.
5. É a integral dupla da função $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ dada sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 4$. Faça a mudança de coordenadas $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \sqrt{2}\rho \sin(\theta)$ e aplique o Teorema de Mudança de Variável: $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin(\theta)$. Consulte agora o exercício 1 para ver a Jacobiana desta mudança. Você agora está integrando sobre $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Na regra da função você substituir $x = x(\rho, \theta)$, $y = y(\rho, \theta)$ e obter $4 - \rho^2$. Monte agora todas as peças e termine a conta desta integral que é a integral da função $(4 - \rho^2)\rho \frac{\sqrt{2}}{2}$ sobre $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
6. As duas superfícies são os gráficos das funções $f(x, y) = 1 - y$ e $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. A projeção da intersecção destes dois gráficos é o

círculo $x^2 + y^2 - y = 0$. O volume procurado é a integral da diferença destas duas funções sobre o disco cuja fronteira é este círculo. Para obter este círculo iguale $f(x, y) = g(x, y)$. Se precisar olha para as notas de aula do dia 23.04.2018 no site do curso. Nesta aula o exercício está completamente resolvido.

7. Todos eles têm conteúdo nulo. Vide as notas de aulas neste site para ver o porquê disto. Em aula isto foi tratado.
8. A função não depende da variável z . Use isto para reduzir a resposta à integral dupla sobre $x^2 + y^2 \leq 1$ da f . Usando coordenadas polares a questão se reduz à $\int_0^1 t e^{t^2} dt$.
9. No primeiro item o conjunto de descontinuidades da função é $\{(0,0)\}$ e no segundo item o conjunto de descontinuidades é o intervalo segmento de reta $[(-1,0), (1,0)]$. O resultado segue por um resultado dado em aula (vide as notas de aula no site do curso): uma função limitada cujo conjunto de descontinuidade tem conteúdo nulo sobre uma região cuja fronteira tem conteúdo nulo é integrável a Riemann.
10. A primeira integral se reduz a $\int_1^2 (1+t) dt$, o segundo você usa que o domínio é um retângulo e $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ e para a última função a integral se reduz à $\int \ln t \, dt = -t + t \ln t$.
11. O primeiro item se reduz a $\int t \operatorname{sen}(t^2) dt$, segundo item a $\int t(e^t - 1) dt$ (que é simples se dividir em duas integrais e aplicar uma substituição em uma delas) e o terceiro item a $\int t(1 - 2 \cos(t)) dt$ que você resolve dividindo em duas integrais uma das quais se resolve usando integração por partes.
12. A primeira é o volume de um cilindro com base $x^2 + y^2 \leq 1$ cuja tampa é o gráfico da função $f(x, y) = 4 - x - y$. Logo o resultado é a integral dupla desta função sobre $x^2 + y^2 \leq 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [4 - x - y] dx dy &= 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y dx dy \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

As duas últimas integrais são nulas e a primeira vale a área do círculo de raio 1, ou seja, ela vale π .

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} y dx dy = \int_{-1}^1 \underbrace{\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right]}_{=0} dx = 0$$

Se usares Coordenadas Polares a integral se reduz ao calculo da integral dupla $\int_0^{2\pi} \int_0^1 [4 - \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta))] d\rho d\theta$. Esta integral pode ser feito invertendo a ordem de integração ou usando o caso particular do Teorema de Fubini dado em aula (vide notas de aula neste site). Se usar a descrição em coordenadas cartesianas a integral se reduz a $\int_{-1}^1 (4 - x)\sqrt{1 - x^2} dx$. Esta integral é fácil pois é a diferença de duas integrais uma das quais representa a metade da área da circunferência de raio 1 e a outra é do tipo $\int_{-r}^r g(t) dt$ com a função g uma função ímpar (isto quer dizer que $g(-t) = -g(t)$). No curso de Cálculo I se ensinou a calcular o valor desta integral: ela vale 0.

A segunda parte se reduz à integral da função $f(x, y) - g(x, y)$ sobre a círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ onde $g(x, y) = x + y$ e $f(x, y) = x + y + 1$. Não é necessário fazer nenhuma conta para se obter o resultado. A resposta é 4π pois diferença das funções é 1 e logo a integral se reduz à área da circunferência que é a projeção deste sólido sobre o eixo- xy .

13. Note que o domínio é uma caixa e a função é da forma $f(x, y, z) = xyz = g(x)h(y)f(z)$ e logo você pode usar o caso particular do Teorema de Fubini.

Para o segundo item, integre primeiramente na variável z reduzindo a integral à integral dupla $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + \frac{1}{3}) dx dy$. A integral $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy$ se resolve utilizando a mudança de Coordenadas Polares e aplicando o caso particular do Teorema de Fubini.

Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas. Não deixe de frequentar a monitoria e às aulas de monitoria.

14. Isto se reduz à integral dupla da função densidade $\delta(x, y, z) = x^2$ sobre o disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Esta integral é facilmente calculada usando se o Teorema de Fubini e calculando as integrais $\int t^3 dt$ e $\int \cos^2(t) dt$.
15. A resposta se reduz ao calculo da integral dupla da função densidade $\delta(x, y) = 2x + y$ sobre o triangulo dado. Se integrar primeiramente na variável y vai ser necessário dividir o triangulo em dois triângulos menores. Os vértices deles são respectivamente $(0,0)$, $((2,0), (2,3))$ e $(2,0), (3,0), (2,3)$. Descreva estes triângulos e integre a função sobre cada uma delas e somando os resultados.

Você também pode fazer uma única integral integrando primeiramente na variável x . Neste caso descreva o triangulo da seguinte forma: $0 \leq y \leq 2$,

$\frac{2}{3}y \leq x \leq 3 - \frac{1}{3}y$. Agora integre a função densidade $\delta(x, y) = 2x + y$ usando estes limites de integração.

16. Primeiramente deve-se deduzir que a função densidade é dada por $\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, onde k é uma constante. O cone sólido pode também ser descrito com sendo $x^2 + y^2 \leq 2$, $0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Se integral primeira mente na variável z a massa procurada é a integral

$$\int_{x^2+y^2 \leq 2} \int_0^{4-2\sqrt{x^2+y^2}} \delta(x, y, z) dz dx dy$$

que é igual a $k \int_{x^2+y^2 \leq 2} (k\sqrt{x^2 + y^2})(4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ (Note que isto é uma integral dupla que, por conveniência escrevemos assim. Isto será feito outras vezes). Uma mudança de variáveis usando Coordenadas Polares reduz esta integral à $k \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho(4 - 2\rho) d\rho d\theta$. Use agora o caso particular do Teorema de Fubini para obter a resposta.

17. Você pode consultar qualquer livro. Esta parte não trataremos em aula mas é bom saber das aplicações nestes sentido.

18. O Teorema de Fubini permite integrar primeira na variável z obtendo que a integral é

$$\int_{x^2+y^2 \leq 4, x>0} \int_{x+y}^{x+y+1} x dz dx dy$$

Esta integral é igual a $\int_{x^2+y^2 \leq 4, x>0} x dx dy$ (É uma integral dupla). Esta integral se resolve usando a Mudança de Variável de Coordenadas Polares e o caso particular do Teorema de Fubini.

19. Para o primeiro item basta usar a Mudança de Coordenadas Polares e usar o caso particular do Teorema de Fubini. Para a segunda parte você tem que descrever a parte de cima da elipse $4x^2 + y^2 \leq 1$ em coordenadas polares. Para isto faça $2x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 1$. A Jacobiana desta mudança é $\frac{\rho}{2}$. Faça a mudança e use o caso particular do Teorema de Fubini.

20. Aqui fica melhor primeiro descrever o domínio e notar que é a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 9$ no primeiro quadrante. Descreva o domínio em coordenadas polares, use o Teorema de Mudança de Variáveis e finalize usando o caso particular do Teorema de Fubini.

21. Para a primeira integral utilize a Mudança de Coordenadas Esféricas e o caso particular do Teorema de Fubini. Para a segunda parte utilize a Mudança de Coordenadas Cilíndricas e o caso particular do Teorema de Fubini.

22. Primeiramente faça um desenho do paralelogramo. A seguir faça a seguinte mudança de variáveis $u = x - y$, $v = x + y$. Note que esta mudança transforma o paralelogramo num retângulo. Descreva este

retângulo e calcule a Jacobiana da mudança de variáveis. Cuidado aqui: ou você usa o Teorema da Função Inversa ou você escreve $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Finalize utilizando o caso particular do Teorema de Fubini.

23. Fazendo um esboço do domínio se observe que é a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Agora pode-se usar a Mudança de Coordenadas Polares e o caso particular do Teorema de Fubini.
24. Use a Mudança de Coordenadas Polares e o caso particular do Teorema de Fubini.
25. Note que isto pare um sorvete. Podemos calcular o volume de várias maneiras. Descrevemos duas maneiras. A primeira forma consiste em escrever a capa esférica como o gráfico de uma função $f(x, y, z)$ e o cone como o gráfico de outra função $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule onde ocorre a intersecção da cone e da esfera dará que isto acontece em cima da circunferência $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$. O volume pedido agora é

$$\iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} (f - g) dx dy$$

Esta integral se resolve usando a Mudança de Coordenadas Polares e o caso particular do Teorema de Fubini.

A segunda maneira consiste em descrever o sólido em coordenadas esféricas. Em aula mostramos como descrever um cone em coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) . Mostramos que $\varphi = \varphi_0$ faz isto. Para descrever o sorvete, que é o sólido, é só notar que ele se descreve como $0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Note que isto descreve uma caixa. Calcule o valor de φ_0 e use o Teorema de Mudança de Variáveis e o caso particular do Teorema de Fubini. Note que você vai precisar da Jacobiana da Mudança de Coordenadas Esféricas.

26. Proceda como no exercício 22: Faça um desenho do paralelogramo e faça a mudança de variáveis $u = x + y, v = x - y$. Esta mudança vai transformar o paralelogramo num retângulo. Novamente cuidado ao calcular a Jacobiana da Mudança de Variáveis. Conclua utilizando o caso particular do Teorema de Fubini.

Se você encontrar um erro na lista ou nas respostas e sugestões, por favor, me avise em aula.

Bons estudos

Muitos dos exercícios serão feitos por completo em aula.

Frequente a monitoria e as aulas de monitoria.

Resolver todos os exercícios é bom mas dominar a teoria e as técnicas é melhor.

Prof. Juriaans, S.O.