

LISTA V
CÁLCULO III
IF - USP - 2018

Prof. Orlando Stanley Juriaans

1. Calcule a $\int_{\gamma} (x^2 - y + 3z) ds$ onde $\gamma(t) = (t, 2t, t), t \in [0, 1]$.
2. Calcule $\int_{\gamma} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$, com $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, 2\pi]$.
3. Calcule $\int_{\gamma} y dx + x^2 dy$, sobre a curva $y = x(4 - x)$ com $x \in [0, 4]$.
4. Calcule a integral a seguir separadamente sobre as duas curvas dadas ambas percorridas na direção crescente da variável independente: $\int_{\gamma} F d\gamma$, $F(x, y) = (\frac{xy}{2}, \frac{x^2}{4})$, $\gamma_1(t) = (t^2, t)$, $\gamma_2(t) = (t, t^3)$ com t variando em $[0, 1]$. Qual a relação entre as integrais?
5. Calcule a integral de superfície onde a superfície $S: 2x + y + 2z = 6$ no primeiro quadrante e a função a ser integrada é dada por $f(x, y, z) = y^2 + 2yz$.
6. Calcule a integral de superfície onde a superfície $S: y^2 + z^2 = 9, 0 \leq x \leq 4, z \geq 0$ e a função a ser integrada é dada por $f(x, y, z) = x + z$. Faça esta integral primeiramente considerando a S como um gráfico e depois parametriza a S e refaça as contas usando a parametrização.
7. Calcule a massa do cone $S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$ sabendo que a sua densidade num ponto P é proporcional à distância de P ao eixo- z .
8. Calcule a $\iint_S (x^2 - y + 3z) dS$ onde $S: 2x + y + 2z = 6$, no primeiro quadrante.
9. Calcule a massa do fluxo do campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ pela superfície $S: z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$ e a densidade de massa do fluxo igual a 3.

Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas.
Não deixe de frequentar a monitoria e às aulas de monitoria.

10. Calcule o fluxo do campo gravitacional pela esfera $S_R((0, 0, 0))$. Suponha que a Terra se encontra na origem $(0, 0, 0)$.

11. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ pela superfície limitada pelos plano- xy e $z = 4 - x^2 - y^2$. Deve-se supor que o vetor normal aponta para fora o sólido limitado pela superfície.

12. Considere a superfície S definida pelo plano- xy , o plano $x + z = 6$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2 + \sin(z), xy + \cos(z), e^y)$ por S .

13. Considere o anel $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ no plano. Considere o campo. Seja F um campo linear, isto é $F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ onde A é uma matriz constante 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$. Calcule o fluxo deste campo pela fronteira de Ω . Considere o normal sempre apontando para fora do anel.

14. Calcule $\oint_{\gamma} F dy$ onde $F(x, y) = (x, y)$ e γ : união $[-1, 1]$ com a semicircunferência $0 \leq y, 1 = x^2 + y^2$.

15. Resolva as equações diferenciais abaixo.

(a) $y' + xy = x^2 + x + 1$

(b) $y' + \frac{1}{x}y = \cos(x)$

(c) $y' = -y + x$

(d) $y' = y + 1$

(e) $y'' + y' - 6y = x + e^x + \cos(x)$

(f) $-ydx + xdy = 0$

(g) $y'' + y' - 2y = e^x + x^2$

(h) $3f_x + 2f_y = 0$, onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

(i) $yf_x - xf_y = 0$

(j) $f_x - f_y = 0$

(k) $xf_x + yf_y = 0$

16. Calcule o Wronskiano dos seguintes pares de funções.

(a) $\sin(x)$ e $\cos(x)$

(b) e^x e xe^x

17. Encontre um campo $G(x, y, z)$ cujo segunda função coordenada seja nula e tal que $\text{rot}(G) = (y - z, z - x, x - y)$. Quantos campos existem? Justifique.

Respostas, Sugestões e Soluções da Lista V

Abaixo você encontra respostas e sugestões de todos os exercícios. Algumas respostas são dadas de forma que dá para continuar resolvendo os exercícios pois se reduzem a integrais vistos no curso de Cálculo I. Outras são quase a solução completa do exercício. Utilize as sugestões apenas se não conseguir avançar na resolução do exercício. **Provavelmente existem erros no texto. Corrija os erros e tire as suas dúvidas em aula e na monitoria.** O importante é você crescer academicamente. Lembre que estas listas são apenas uma parte das coisas que envolvem este curso. São elas:

- I. As aulas e as notas de aula às quais você tem acesso via o site do curso.
- II. As aulas de monitoria e a monitoria.
- III. As listas de exercícios com sugestões e comentários que você tem acesso via o site do curso.

Para a sua experiência de aprendizagem possa ser completa sugerimos que frequente às aulas, à monitoria e que se empenhe na resolução dos exercícios.

Segue agora as sugestões e soluções desta lista.

1. Esta é uma integral de linha de um campo escalar $f(x, y, z) = x^2 - y + 3z$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, 2t, t)$, $t \in [0, 1]$. Tem-se $f(\gamma(t)) = t^2 - 2t + 3t = t^2 + t$, $\gamma'(t) = (1, 2, 1)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{6}$ e logo tem-se que calcular a integral

$$\sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt$$

2. É uma integral de linha do campo de um campo vetorial. Na forma como está deve-se colocar $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ e $dx = -3 \sin t dt$, $dy = 3 \cos t dt$. Substituindo isto na integral deve-se ainda fazer manipulações trigonométricas: $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos^4 t - (1 - \cos^2 t)^2 = 2\cos^2 t - 1 = \cos(2t)$ e $\cos^2 t \sin^2 t = \frac{1}{4} \sin^2(2t) = \frac{1 - \cos(4t)}{8}$. A resposta final: $\frac{243\pi}{4}$
3. A curva já está parametrizada: $y = x(4 - x)$, $dy = (4 - 2x)dx$. Substituindo isto na integral obtém-se

$$\int_{\gamma} y dx + x^2 dy = \int_0^4 [x(4 - x) + x^2(4 - 2x)] dx$$

4. Observe que ambas as curvas ligam os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$. Uma é o gráfico da função $y = \sqrt{x}$ e a outra é o gráfico da função $y = x^3$. Tem-se que $\gamma_1'(t) = (2t, 1)$, $\gamma_2'(t) = (1, 3t^2)$,

$$\langle F(\gamma_1(t)) | \gamma_1'(t) \rangle = \langle F(\gamma_2(t)) | \gamma_2'(t) \rangle = \frac{5t^4}{4}$$

Segue-se que o trabalho realizada pela força sobre ambos os caminhos é igual.

Pode-se provar que isto não é um acidente: para provar isto vamos usar integração por partes. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva qualquer tal que $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(1) = (1,1)$. Note que isto implica que

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x(1) = y(1) = 1$$

Vamos usar isto na integração por partes a seguir. Tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x(t)x'(t)y(t)}{2} + \frac{x^2(t)y'(t)}{4} \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{x(t)x'(t)y(t)}{2} dt + \int_0^1 \frac{x^2(t)y'(t)}{4} dt \\ &= \frac{x^2(t)y(t)}{4} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 y'}{4} dt + \int_0^1 \frac{x^2 y'}{4} dt = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Isto mostra que a integral independe do caminho. Poderia também ser observado assim:

O campo é

$$F = (P, Q) = \left(\frac{xy}{2}, \frac{x^2}{4} \right)$$

e

$$\text{rot}(F) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0$$

Logo o campo é conservativo. Note que as funções coordenadas deste campo são funções polinomiais e logo este campo é de classe C^∞ . A região delimitada pelas duas curvas, portanto, sempre pertence ao domínio do campo e logo este campo tem uma função potencial. Segue de um resultado visto em aula (vide as notas de aula neste site) que a integral independe do caminho.

5. Faça um esboço da superfície S . Ela é um triângulo com vértices $(0,0,0)$, $(0,6,0)$ e $(0,0,3)$. Tem várias formas de obter uma parametrização mas neste caso é mais simples pois ela é o gráfico da função $g(u,v) = \frac{6-2u-v}{2} = 6 - u - \frac{v}{2}$. esta parametrização se obtém isolando a variável z na equação de S e pondo $x = u, y = v$ e $z = g(u,v)$. Assim a parametrização da superfície é

$$\psi(u,v) = (u, v, g(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega_0$$

para obter Ω_0 você deve projetar o gráfico verticalmente sobre o plano- xy . Fazendo isto obtém-se o triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,6)$. Uma descrição dele é $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 6 - 2u$. Quando a superfície é o gráfico da função $g(u,v)$ vimos em aula que

$$\|\psi_u \times \psi_v\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} = \frac{3}{2}$$

Logo a integral pedida é

$$\iint_S f dS = \iint_{\Omega_0} f(\psi(u,v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv = \frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} [v^2 + 2vg(u,v)] du dv =$$

$$\frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} [12v - 2uv] du dv$$

6. Faça um esboço da superfície para ver que é parte de um cilindro de raio 3 e eixo central igual ao eixo- x . Pode-se escrever a equação de S : $(\frac{z}{3})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 4$. Destas duas descrições obtém-se a superfície com gráfico da função $g(x,y) = \sqrt{9 - y^2}, 0 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 3$ e uma parametrização dela é $\psi(u,v) = (u, 3 \cos v, 3 \sin v), 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \pi$. Note que

$$\nabla g(u,v) = \left(0, \frac{-v}{\sqrt{9-v^2}}\right), \quad \|\nabla g(u,v)\| = \frac{|v|}{\sqrt{9-v^2}}.$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \psi_u(u,v) &= (1,0,0), \\ \psi_v(u,v) &= (0, -3 \sin v, 3 \cos v), \\ \psi_u \times \psi_v &= (0, -3 \cos v, -3 \sin v) \\ \|\psi_u \times \psi_v\| &= 3. \end{aligned}$$

Tem-se também que

$$f(u,v,g(uv)) = u + v \text{ e } f(\psi(u,v)) = u + 3 \sin v.$$

Podemos agora calcular a integral $\iint_S f dS$ das duas formas pedidas.

$$\int_0^4 \int_{-3}^3 f(u, v, g(u, v)) \cdot \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} dv du$$

ou

$$\int_0^4 \int_0^\pi f(\psi(u, v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| dv du$$

esta última é

$$3 \int_0^4 \int_0^\pi [u + 3 \cos v] du dv = 3 \int_0^4 \int_0^\pi u dv du + 9 \int_0^4 \int_0^\pi \cos v dv du$$

Qual delas é mais fácil de se fazer? Nem sempre é assim.

7. Pelo que foi visto em aula a massa de uma superfície é uma integral de superfície de um campo escalar. Neste caso o campo escalar é a densidade no ponto ρ . É dado que a densidade num ponto é proporcional à sua distância até o eixo- z . Usando o Teoria de Geometria e vetores conclui-se que $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ onde k é a constante de proporcionalidade. Assim devemos calcular a integral

$$k \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

Basta então fazer o seguinte: escrever a superfície com o gráfico de uma função $g(u, v)$ ou achar uma parametrização $\psi(u, v)$ para ela. Vamos fazer a última coisa: notamos que as curvas de níveis da $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ são círculos. Aproveitando disto colocamos $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ e logo $z = 4 - 2u^2$ (note que esta é uma superfície de revolução e logo você também pode se aproveitar disto para dar uma parametrização). Continuando, tem-se que

$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4 - 2u^2), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Para obter a variação de u : observe que a intersecção de S com o plano- xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Tem-se

$$\begin{aligned} \psi_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, -2u) \\ \psi_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (2u \cos v, 2u \sin v, u) \\ \|\psi_u \times \psi_v\| &= \sqrt{5u^2} = u\sqrt{5} \\ \rho(\psi(u, v)) &= k \end{aligned}$$

Assim a massa da superfície é a integral

$$\iint_S \rho dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho(\psi(u, v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{5} du dv$$

$$= 2k\pi\sqrt{5} \int_0^2 u du$$

8. Faça um esboço da superfície S . Ela é um triângulo com vértices $(0,0,0)$, $(0,6,0)$ e $(0,0,3)$. Tem várias formas de obter uma parametrização mas neste caso é mais simples pois ela é o gráfico da função $g(u, v) = \frac{6-2u-v}{2} = 6 - u - \frac{v}{2}$. esta parametrização se obtém isolando a variável z na equação de S e pondo $x = u$, $y = v$ e $z = g(u, v)$. Assim a parametrização da superfície é

$$\psi(u, v) = (u, v, g(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega_0$$

para obter Ω_0 você deve projetar o gráfico verticalmente sobre o plano- xy . Fazendo isto obtém-se o triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,6)$. Uma descrição dele é $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq 6 - 2u$. Quando a superfície é o gráfico da função $g(u, v)$ vimos em aula que

$$\|\psi_u \times \psi_v\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} = \frac{3}{2}$$

Logo a integral pedida é

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_{\Omega_0} f(\psi(u, v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv \\ &= \frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} [u^2 - v + 3g(u, v)] du dv = \\ &= \frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} \left[u^2 - 3u - \frac{5v}{2} + 18 \right] du dv \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \int_0^{6-2u} \left[u^2 - 3u - \frac{5v}{2} + 18 \right] dv du$$

9. Fluxo não se deve apenas por uma força. Poderia ser um líquido ou gás em escoamento. Assim o fluxo representa a quantidade de matéria que passa pela superfície e o seu peso é dada pela integral de superfície

$$\iint_S \rho dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho(\psi(u, v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{5} du dv$$

$$= 2k\pi\sqrt{5} \int_0^2 u du$$

8. Faça um esboço da superfície S . Ela é um triângulo com vértices $(0,0,0)$, $(0,6,0)$ e $(0,0,3)$. Tem várias formas de obter uma parametrização mas neste caso é mais simples pois ela é o gráfico da função $g(u, v) = \frac{6-2u-v}{2} = 6 - u - \frac{v}{2}$. esta parametrização se obtém isolando a variável z na equação de S e pondo $x = u$, $y = v$ e $z = g(u, v)$. Assim a parametrização da superfície é

$$\psi(u, v) = (u, v, g(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega_0$$

para obter Ω_0 você deve projetar o gráfico verticalmente sobre o plano- xy . Fazendo isto obtém-se o triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,6)$. Uma descrição dele é $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq 6 - 2u$. Quando a superfície é o gráfico da função $g(u, v)$ vimos em aula que

$$\|\psi_u \times \psi_v\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} = \frac{3}{2}$$

Logo a integral pedida é

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_{\Omega_0} f(\psi(u, v)) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv \\ &= \frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} [u^2 - v + 3g(u, v)] du dv = \\ &= \frac{3}{2} \iint_{\Omega_0} \left[u^2 - 3u - \frac{5v}{2} + 18 \right] du dv \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \int_0^{6-2u} \left[u^2 - 3u - \frac{5v}{2} + 18 \right] dv du$$

9. Fluxo não se deve apenas por uma força. Poderia ser um líquido ou gás em escoamento. Assim o fluxo representa a quantidade de matéria que passa pela superfície e o seu peso é dada pela integral de superfície

$$\iint_S \rho \langle \vec{F} | \vec{N} \rangle dS$$

onde ρ é a função densidade da matéria. Nestes caso ela é constante igual a 3. Para calcular a integral vamos parametrizar a superfície S :

S é uma superfície de revolução e também é um gráfico. Isto pode ser usado para achar uma parametrização. As curvas de níveis dela são círculos e usamos isto para achar uma parametrização para ela. Note que a sua intersecção com o plano $-xy$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Estes dados justificam a parametrização

$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4 - u^2), \quad (u, v) \in \Omega_0: 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \psi_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, -2u) \\ \psi_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (2u^2 \cos v, 2u^2 \sin v, u) \\ \|\psi_u \times \psi_v\| &= \sqrt{u^2(1 + 4u^2)} = u\sqrt{1 + 4u^2} \\ \rho(\psi(u, v)) &= 3 \\ \vec{F}(\psi(u, v)) &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

Assim a massa do fluxo pela superfície é a integral

$$3 \iint_S \langle \psi(u, v) | \psi_u \times \psi_v(u, v) \rangle du dv =$$

$$3 \iint_{\Omega_0} [u^3 - u] du dv = 6\pi \int_0^2 [u^3 - u] du$$

Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas. Não deixe de frequentar a monitoria e às aulas de monitoria.

10. Estando a Terra na origem tem-se que a distancia de um ponto (x, y, z) até a Terra é $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A força gravitacional é inversamente proporcional com o quadrado da distancia e é uma força radial. Disto segue que a força gravitacional é

$$\vec{F}(x, y, z) = k \frac{x}{\|x\|^3}$$

Note que não precisamos parametrizar a esfera de raio R para achar um vetor normal a ela num dos seus pontos (x, y, z) . De fato o vetor

$$\vec{N}(x, y, z) = \frac{x}{\|x\|}$$

é normal à esfera no ponto (x, y, z) se este ponto pertence a ela. Sendo $\vec{N}$ um versor com mesmo sentido e direção que a $\vec{F}$ segue-se que

$$\langle \vec{F}(p) | \vec{N}(p) \rangle = \|\vec{F}\| = \frac{k}{\|p\|^2} = \frac{k}{R^2}$$

Logo o fluxo pedido é

$$Fluxo = \iint_S \langle \vec{F}(p) | \vec{N}(p) \rangle dS = \frac{k}{R^2} \iint_S dS$$

sabemos que

$$\iint_S dS = \text{Área da esfera de raio } R \text{ que é igual a } 4\pi R^2$$

Isto é conhecido mas lembre que calculamos isto novamente em aula usando uma parametrização da esfera e integrais de superfícies.

11. A superfície S pela qual deve ser calculado o fluxo é a união de duas superfícies:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ S_1: x^2 + y^2 &\leq 4 \text{ no plano } xy \\ S_2: z &= 4 - x^2 + y^2, \quad z > 0 \\ S_1 \cap S_2 &= \emptyset \end{aligned}$$

Pelas propriedades da integral de superfície tem-se

$$\iint_S \vec{F} dS = \iint_{S_1} \vec{F} dS + \iint_{S_2} \vec{F} dS$$

Parametrizações: em exercícios anteriores já parametrizamos a S_2 e logo podemos escrever diretamente:

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \psi_1(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in \Omega_1: u^2 + v^2 \leq 4 \\ \vec{N}(p) &= (0, 0, -1) \text{ e } \vec{F}(\psi_1(u, v)) = (0, u, v^2) \\ \langle \vec{F}(\psi_1(u, v)) | \vec{N}(p) \rangle &= -v^2 \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, 0) \\ \psi_v &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_u \times \psi_v(u, v) &= (0, 0, 1) \\ \|\psi_u \times \psi_v\| &= 1 \text{ (não precisamos disto)}\end{aligned}$$

Logo

$$\iint_{S_1} \vec{F} dS = - \iint_{\Omega_1} v^2 du dv$$

$$\begin{aligned}\psi(u, v) &= \psi_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4 - u^2) \\ (u, v) &\in \Omega_2: 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ \psi_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, -2u) \\ \psi_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (2u^2 \cos v, 2u^2 \sin v, u) \\ \|\psi_u \times \psi_v\| &= \sqrt{u^2(1 + 4u^2)} = u\sqrt{1 + 4u^2} \text{ (não precisamos disto)} \\ \vec{F}(\psi(u, v)) &= (8 - 2u^2, u \cos v, u^2 \sin^2 v) \\ \langle \vec{F}(\psi(u, v)) | \psi_u \times \psi_v(u, v) \rangle &= 2u^3(8 - 2u^2) \cos v + u^3[\sin(2v) + \sin^2 v]\end{aligned}$$

Logo

$$\iint_{S_2} \vec{F} dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [2u^3(8 - 2u^2) \cos v + u^3[\sin(2v) + \sin^2 v]] dv du =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} u^3 \sin^2 v dv du$$

Para obter a resposta é só somar as duas integrais.

12. A superfície S pela qual deve ser calculado o fluxo é a união de três superfícies:

$$\begin{aligned}S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\ S_1: x^2 + y^2 &\leq 4 \text{ no plano-}xy && \text{(base)} \\ S_2: x^2 + y^2 &\leq 4, z = 6 - x && \text{(tampa)} \\ S_3: x^2 + y^2 &= 4, 0 < z < 6 - x && \text{(lateral)} \\ S_1 \cap S_2 &= \emptyset, \quad S_1 \cap S_3 = \emptyset, \quad S_2 \cap S_3 = \emptyset\end{aligned}$$

Pelas propriedades da integral de superfície tem-se

$$\iint_S \vec{F} dS = \iint_{S_1} \vec{F} dS + \iint_{S_2} \vec{F} dS + \iint_{S_3} \vec{F} dS$$

Parametrizações:

$$\begin{aligned}\psi(u, v) &= \psi_1(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in \Omega_1: u^2 + v^2 \leq 4 \\ \vec{N}(p) &= (0, 0, -1) \text{ e } \vec{F}(\psi_1(u, v)) = (u^2, 1 + uv, e^v) \\ \langle \vec{F}(\psi_1(u, v)) | \vec{N}(p) \rangle &= -e^v \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, 0) \\ \psi_v &= (0, 1, 0) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (0, 0, 1) \\ \| \psi_u \times \psi_v \| &= 1 \text{ (não precisamos disto)}\end{aligned}$$

$$\iint_{S_1} \vec{F} dS = - \iint_{\Omega_1} e^v du dv$$

$$\begin{aligned}\psi(u, v) &= \psi_2(u, v) = (u, v, 6 - u), \quad (u, v) \in \Omega_2: u^2 + v^2 \leq 4 \\ \vec{N}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \\ \vec{F}(\psi_2(u, v)) &= (u^2 + \sin(6 - u), uv + \cos(6 - u), e^v) \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, -1) \\ \psi_v &= (0, 1, 0) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (1, 0, 1) \\ \| \psi_u \times \psi_v \| &= \sqrt{2} \text{ (não precisamos disto)} \\ \langle \vec{F}(\psi_2(u, v)) | \psi_u \times \psi_v(u, v) \rangle &= u^2 + \sin(6 - u) + e^v\end{aligned}$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} dS = \iint_{\Omega_2} [u^2 + \sin(6 - u) + e^v] du dv =$$

$$\iint_{\Omega_2} [u^2 + e^v] du dv$$

$$\begin{aligned}\psi(u, v) &= \psi_3(u, v) = (2\cos v, 2\sin v, 0) + u(0, 0, 1) = (2\cos v, 2\sin v, u) \\ (u, v) \in \Omega_3: & 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 < u < 6 - 2\cos v \\ \psi_u(u, v) &= (-2\sin v, 2\cos v, 1) \\ \psi_v &= (0, 0, 1) \\ \psi_u \times \psi_v(u, v) &= (2\cos v, 2\sin v, 0) \\ \vec{F}(\psi_3(u, v)) &= (2\cos^2 v + \sin u, 2\sin(2v) + \cos u, e^{2\sin v}) \\ \| \psi_u \times \psi_v \| &= 2 \text{ (não precisamos disto)} \\ \langle \vec{F}(\psi_3(u, v)) | \psi_u \times \psi_v(u, v) \rangle &= \\ 4\cos^3 v + 2\sin(u) \cos(v) + 4\sin(2v)\sin(v) + 2\cos(u) \sin(v)\end{aligned}$$

$$\iint_{S_3} \vec{F} dS =$$

$$\iint_{\Omega_3} [4\cos^3 v + 2\sin(u) \cos(v) + 4\sin(2v)\sin(v) + 2\cos(u) \sin(v)] du dv$$

Agora é só terminar as integrais e somar elas para obter a resposta.

13. Vamos considerar um círculo de raio R

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \gamma'(t) &= (-R\sin t, R\cos t) \\ J(\gamma'(t)) &= (-R\cos t, -R\sin t) = -\gamma(t) \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \vec{F}(x, y) &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy) \\ \vec{F}(\gamma(t)) &= R(a\cos t + b\sin t, c\cos t + d\sin t) \\ \langle \vec{F}(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle &= -\langle \vec{F}(\gamma(t)) | \gamma(t) \rangle = \\ &= R^2 [a\cos^2 t + d\sin^2 t + \frac{b+c}{2} \sin(2t)] \end{aligned}$$

O fluxo pela curva é então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle dt &= \\ R^2 \int_0^{2\pi} \left[a\cos^2 t + d\sin^2 t + \frac{b+c}{2} \sin(2t) \right] dt &= \\ R^2 \int_0^{2\pi} [a\cos^2 t + d\sin^2 t] dt &= \\ \pi R^2 \text{Traço}(A) = \pi R^2 \text{Traço}(D(\vec{F})) = \pi R^2 \text{div}(\vec{F}) &= \\ \iint_{\text{Int}(\gamma)} \text{div}(\vec{F}) dx dy & \end{aligned}$$

Veremos futuramente que isto não é por acaso. Para terminar o exercício aplique o que foi acima lembrando que o normal sempre tem que apontar para fora do anel.

14. A curva pode ser escrita como a união

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0), -1 \leq t \leq 1$$

$$\gamma'_1(t) = (1, 0)$$

$$\vec{F}(\gamma_1(t)) = (t, 0)$$

$$\langle \vec{F}(\gamma_1(t)) | \gamma'_1(t) \rangle = t$$

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}(\gamma_1(t)) | \gamma'_1(t) \rangle dt = \int_{-1}^1 t dt$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma'_2(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\vec{F}(\gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t) = \gamma_2(t)$$

$$\langle \vec{F}(\gamma_2(t)) | \gamma'_2(t) \rangle = 0$$

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}(\gamma_2(t)) | \gamma'_2(t) \rangle dt = \int_0^{\pi} 0 dt$$

15. Damos as sugestões. Em aula todos serão feitas.

(I) $y' + xy = x^2 + x + 1$

O fator integrante é $e^{\int x dx}$, multiplique com o fator integrante, integre e depois divide novamente pelo fator integrantes. Lembre que no fator integrante você não incorpora constantes. Vejamos:

$$y' e^{x^2/2} + x e^{x^2/2} y = (x^2 + x + 1) e^{x^2/2}$$

$$(y e^{\frac{x^2}{2}})' = (x^2 + x + 1) e^{x^2/2}$$

$$y e^{\frac{x^2}{2}} = c + \int (x^2 + x + 1) e^{x^2/2} dx, \quad c \text{ uma constante}$$

Efetue as integrais e divide tudo pelo F.I. (fator integrante). Se você encontrar dificuldades ou se as integrais não podem ser resolvidos não tem problema. Continue com os próximos exercícios pois o importante é você dominar a técnica.

$$(m) \quad y' + \frac{1}{x}y = \cos(x)$$

O fator integrante é $e^{\int \frac{1}{x} dx}$. Proceda como no exemplo anterior, vejamos:

O F.I. é

$$e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$x(y' + \frac{1}{x}y) = x \cos(x)$$

$$(xy)' = x \cos x$$

$$xy = c + \int x \cos x dx$$

$$xy = c + x \sin x + \cos x$$

$$y(x) = \frac{c}{x} + \sin x + \frac{\cos(x)}{x}$$

$$(n) \quad y' = -y + x$$

Escreva como $y' + y = x$.

O fator integrante $e^{\int dx}$. Proceda como antes. Lembre que você deve dominar as técnicas de integração.

$$(o) \quad y' = y + 1$$

Escreva como $y' - y = 1$

O fator integrante $e^{-\int dx}$. Proceda como antes.

$$(p) \quad y'' + y' - 6y = x + e^x + \cos(x)$$

A equação característica da equação homogênea $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Use o princípio da superposição para achar uma solução particular. Lembre das dicas dadas em aula para achar as soluções particulares em alguns casos específicos.

$$(q) \quad -y dx + x dy = 0$$

Ela é do tipo

$$P dx + Q dy = 0$$

Ela é exata se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Neste exercício porém tem-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

Pode-se procurar um F.I. que torna ela exata. Tentemos uma da forma

$$\mu = \mu(x)$$

Precisamos então resolver a equação

$$\frac{\partial(x\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(-y\mu)}{\partial y} = 0$$

Após derivar obtém-se

$$2\mu + x\mu' = 0$$

cuja solução é

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando a equação original com o F.I. obtém-se a equação exata

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

ou seja, queremos uma função $f(x, y)$ cuja gradiente é

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}\right)$$

Como já foi visto em cursos de Cálculo anteriores como resolver esta equação obtém-se

$$f(x, y) = -\frac{y}{x}$$

Observamos que tem outros fatores integrantes. Você pode achar uma outra impondo que ela seja da forma

$$\mu = \mu(y)$$

Existe também da forma

$$\mu = \mu(x, y)$$

Experimente por exemplo

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Não é preciso você explorar todas as situações possíveis. Basta que saiba achar uma solução e nem todas as soluções possíveis.

$$(r) \quad y'' + y' - 2y = e^x + x^2$$

A equação característica da equação homogênea $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Logo a solução geral da equação homogênea associada é

$$\varphi_H(t) = ae^{-t} + be^{2t}$$

A solução particular você procura da forma

$$\varphi_P(t) = ae^t + (b + cx + dx^2)$$

Derive esta expressão duas vezes e substitua na equação obtendo um sistema que você deve resolver

O Princípio da Superposição te permite fazer isto de forma separada. Lembre das dicas dadas em aula para achar as soluções particulares em alguns casos específicos. Caso não se lembrar consulte as notas de aula neste site.

A solução geral é

$$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \varphi_P(t)$$

$$(s) \quad 3f_x + 2f_y = 0, \text{ onde } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Lembre da interpretação geométrica: $\langle (3,2) | \nabla f \rangle = 0$. Dai segue que ∇f é paralelo a $(-2,3)$. Considere igualdade e resolva a equação. Lembre que nem sempre dá certo.

$$(t) \quad yf_x - xf_y = 0$$

Novamente a interpretação geométrica: $\langle (y, -x) | \nabla f \rangle = 0$. Segue que ∇f é paralelo a (x, y) . Proceda como antes e veja se funciona. Veja: suponha igualdade obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$$

Nos cursos anteriores de Cálculo foi ensinado como resolver um tal sistema. Vejamos:

Integre a primeira equação (ou aquela que é mais fácil de ser integrada) para obter uma expressão para a função:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

Derive em relação à variável em que a integração não ocorreu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y)$$

Igualando isto à que você tem na segunda equação do sistema acima tem-se

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= y \\ \varphi(y) &= \int y dy = \frac{y^2}{2} + c, \quad c \text{ uma constante} \end{aligned}$$

Se conclui que todas as funções procuradas são dadas pela expressão

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c, \quad c \text{ uma constante}$$

$$(u) \quad f_x - f_y = 0$$

Interpretação geométrica: $\langle (1, -1) | \nabla f \rangle = 0$. Funciona bem a interpretação geométrica? Em aula vamos mostrar como consertar. Nem sempre dá certo este tipo de conserto. A explicação está abaixo:

Considere

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Se as funções envolvidas foram de classe pelos menos C^2 então, aplicando o Teorema de Schwartz obtém-se a seguinte condição para o sistema ter soluções. Ela é necessária mas nem sempre ela é suficiente. Vide as notas de aula neste site.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Note que isto é equivalente à seguinte condição sobre o rotacional do campo $(P, Q, 0)$:

$$\text{rot}((P, Q, 0)) = \vec{0}$$

$$(v) \quad x f_x + y f_y = 0$$

Interpretação geométrica: $\langle (1,1) | \nabla f \rangle = 0$. Procede como antes e veja se funciona. Talvez será necessário achar um F.I.

16. Calcule o Wronskiano dos seguintes pares de funções.

(c) $\sin(x)$ e $\cos(x)$

(d) e^x e $x e^x$

Lembre que o Wronskiano de duas funções é

$$W(f, g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$$

Usando isto

$$W(\sin x, \cos x) = \det \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = -1$$

$$W(e^x, x e^x) = \det \begin{pmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{pmatrix} = e^{2x}$$

17. Encontre um campo $G(x, y, z)$ cujo segunda função coordenada seja nula e tal que $\text{rot}(G) = (y - z, z - x, x - y)$. Quantos campos existem? Justifique.

Seguindo a sugestão escreva

$$G(x, y, z) = (f(x, y, z), 0, g(x, y, z))$$

e calcule o

$$\text{rot}(G(x, y, z)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, 0, g) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & 0 & g \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Disto segue que

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} = y - z \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} = z - x \\ -\frac{\partial f}{\partial y} = x - y \end{cases}$$

Da última equação segue que

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 - xy + \phi(x, z)$$

Da primeira equação obtém-se

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 - yz + H(x, z)$$

Derivando estas duas expressões obtidas em relação a z e substituindo na segunda equação segue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} = z - x$$

Impomos

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = z$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = x$$

Resolvendo de forma mais simples segue que uma solução é

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}z^2$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 - yz + \frac{1}{2}x^2$$

Note que duas soluções deferem por uma de rotacional nulo. Uma função de rotacional nulo é um gradiente se o domínio for bom. Logo outras soluções são

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}z^2, \quad 0, \quad \frac{1}{2}y^2 - yz + \frac{1}{2}x^2 \right) + \nabla h(x, y, z)$$

onde $h(x, y, z)$ é qualquer função diferenciável.

Logo existem infinitos campos que satisfazem esta condição.