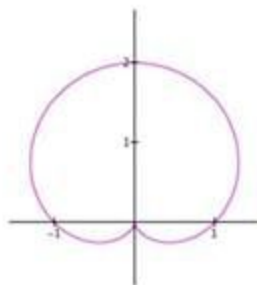


LISTA VI
CÁLCULO III
IF - USP - 2018

Prof. Orlando Stanley Juriaans

1. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ pela superfície limitada pelos plano- xy e $z = 4 - x^2 - y^2$.
2. Considere a superfície S definida pelo plano- xy , o plano $x + z = 6$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2 + \sin(z), xy + \cos(z), e^y)$ por S .
3. Calcule o fluxo pela superfície do campo dado.
 - (a) $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$ e $S: x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$.
 - (b) $F(x, y, z) = (y, y^2, x)$ e S a superfície limitada pelos planos coordenadas do primeiro quadrante e a esfera $S_5((0, 0, 0))$.
 - (c) $F(x, y, z) = (2z, 3y, 4x)$ e S limitada pelo plano $2x + 2y + z = 2$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.
 - (d) $F(x, y, z) = (x^4y, -2x^3y^2, z^2)$ e $S: x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h$.
4. Considere a curva de Jordan γ que engloba uma área de 3π no plano. Seja F um campo linear, isto é $F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ onde A é uma matriz constante 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$. Suponha que A tem dois autovalores distintos cujo diferença é igual a 2 e sendo o maior duas vezes maior do que o menor. Calcule o fluxo do campo por γ .
5. Seja F um campo linear e suponha que a matriz associada a F tem polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$. Seja γ uma curva de Jordan cujo comprimento é igual a 2017. Calcule o fluxo de F por γ .
6. Considere o anel $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ no plano. Considere o campo dado no exercício 8. Calcule o fluxo deste campo pela fronteira de Ω .
7. Seja $F(x, y, z)$ um campo e suponha que o polinômio característico de $DF(p_0)$ é $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 7)$. Calcule $\text{div}(F)(p_0)$ e decida se p_0 é uma fonte, um poço ou incompressível, ou seja se o divergente neste ponto é positivo, negativo ou zero.
8. Seja γ a parte da curva abaixo que se encontra acima do eixo- x e considere o campo $F(x, y) = (-x^2 + y^2, 2xy)$. Calcule o fluxo de F por γ .



9. Considere a integral de linha $\oint_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ onde γ é uma curva de Jordan orientada positivamente e que não passa pela origem. Quais os possíveis valores para esta integral? Explique bem a sua resposta. Dica: a resposta depende se a origem está ou não no interior da curva em questão.
10. Considere duas funções de classe C^2 no plano $u = u(x, y), v = v(x, y)$ satisfazendo as Equações de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, u_y = -v_x$. Sejam $z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y), dz = dx + idy$, onde $i^2 = -1$. Seja γ uma curva de Jordan; calcule $\oint_{\gamma} f(z)dz$.
11. Um *Chapéu de Saci* é qualquer curva de classe C^2 no plano- xy , sem auto intersecção, que conecta dois pontos do eixo- x e que não intersecta o eixo- x em nenhum outro ponto.
- Esboce alguns chapéus de Saci.
 - Considere o campo $F(x, y) = (2x - y - 2xe^y, e^y x^2)$ e um chapéu de Saci de área 7π ligando os pontos $(-3, 0)$ e $(4, 0)$. Calcule o fluxo do campo pelo chapéu de Saci.
 - É possível reposicionar este chapéu de saci de forma que o fluxo por ele seja zero? Se for possível, quais pontos do eixo- x este chapéu conecta?
 - É possível encontrar um chapéu de Saci conectando os pontos $((a, 0)$ e $(b, 0)$ de forma que o fluxo por ele seja zero? Descreva este chapéu.
12. Considere o campo $F(x, y) = (-(x^2y + 3x - 2y), 4y^2x - 2x)$ e uma curva de Jordan γ . Seja $V(\gamma) = \oint_{\gamma} Fdy$. Determine a curva γ_0 tal que $V(\gamma_0) \leq V(\gamma)$ e calcule o valor $V(\gamma_0)$. Note que este exercício é um pouco diferente do que você já tenha feito. Reflita um pouco pois a sua solução não é complicada.
13. Seja $F(x, y, z) = (x + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ e $S: 0 \leq z = 4 - x^2 - y^2$. O objetivo deste exercícios é calcular a integral $\iint_S \text{rot}(F)dS$ de várias formas.
- De forma direta: usando uma parametrização de S .
 - Usando o Teorema de Gauss: cuidado pois S não é uma superfície fechada.
 - Usando o Teorema de Stokes: se tomar cuidado as integrais são simples de resolver ou nem é preciso calculá-las.

14. Seja $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ e $0 \leq z = 4 - x^2 - y^2$. Calcule a integral de linha da F sobre a fronteira $\partial(S)$. Use o Teorema de Stokes e seu conhecimento sobre a integral de funções pares e ímpares sobre intervalos simétricos em relação à origem.
15. Considere o triângulo formado pelo plano $2x + 2y + z = 6$ e o primeiro quadrante do espaço e seja $F(x, y, z) = (-y^2, z, x)$. Calcule a integral de linha do campo sobre este triângulo se o último for positivamente orientado.

**Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas.
Não deixe de frequentar à monitoria e às aulas de monitoria.**

16. No livro texto da sua escolha, encontre a forma de centro de massa de uma região no plano e deduz, a partir destas formulas que o centro de massa é dada por $\frac{1}{A}(\iint_{\Omega} x dx dy, \iint_{\Omega} y dx dy)$, onde $A = \iint_{\Omega} dx dy$. Considere agora o círculo $\gamma: (x - a)^2 + y^2 = a^2$ e o campo $F(x, y) = (3x^2y^2, 2x^2(1 + xy))$. Calcule $\oint_{\gamma} F dy$ sem apelar para muitas contas.
17. Calcule $\oint_{\gamma} F dy$ onde $F(x, y) = (x, y)$ e γ : união $[-1, 1]$ com a semicircunferência $0 \leq y, 1 = x^2 + y^2$.
18. Generalize os resultados sobre campos lineares para campos em $\mathbb{R}^3$.
19. Calcule $\oint_{\Gamma} F d\Gamma$ onde $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ e Γ é o triângulo orientado ABC , onde $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.
20. Um chapéu de Saci em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de classe C^2 S tal que $\partial(S)$ está contido num plano π , $(\partial(S) \cap \pi) \cup S$ seja uma superfície compacta e $(S - \partial(S)) \cap \pi = \emptyset$.
- Esboce alguns chapéus de Saci.
 - Sejam $\pi = \text{plano-}xy$, $F(x, y, z) = (2x - y + z, x + y - z, 3x + 5y + z)$ e seja S um chapéu de Saci de volume 3 e fronteira uma circunferência de raio 2. Calcule o fluxo do campo pelo chapéu.
 - É possível reposicionar o chapéu no plano dado de forma que o fluxo por ele seja zero? Encontre uma tal posicionamento.
21. Resolva as equações diferenciais abaixo.
- $-ydx + xdy = 0$
 - $3f_x + 2f_y = 0$, onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
 - $yf_x - xf_y = 0$
 - $f_x - f_y = 0$
 - $xf_x + yf_y = 0$

22. Procure exemplos de superfícies orientáveis e não orientáveis. Mostre que uma superfície de nível de uma função de classe C^2 é orientável. Existe um resultado que afirma que se uma superfície é não orientável então ela contém uma cópia da Faixa de Möbius. Você consegue imaginar isto? Por que os Teoremas de Gauss e Stokes não valem para superfícies não orientáveis?
23. Um líquido está girando num container cilíndrico com eixo igual ao eixo $-z$ e base circular uma circunferência de raio 2. O campo que descreve este movimento é dado por $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} (-y, x, 0)$. Calcule $\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS$ onde S é a tampa do container cilíndrico.
24. Respondo ao exercício anterior no caso em que o raio da base do container seja 1 e o campo seja $F(x, y, z) = (1, 1, -2)$. Repita o exercício no caso em que o raio da base do container seja 1 e o campo seja dado por $F(x, y, z) = (-z, 0, y)$.
25. Calcule $\int_\gamma y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$, com $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
26. Calcule $\int_\gamma y dx + x^2$
27. Calcule a área do losango limitado pelas quatro retas a seguir: $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - 2y = -4$, $x - 2y = 0$. Agora calcule a massa deste losango sabendo que a densidade de massa é dada por $\rho(x, y) = 3xy$.
28. Calcule a integral

$$\frac{1}{2} \oint_\gamma [-2y + \sin(x + \cos(x))] dx + [2x + \ln(2 + \sin(y)) + e^{-\cos(y)}] dy$$

29. Calcule as áreas de uma circunferência de raio r e de uma elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ usando uma integral de linha.
30. Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^2 definida em $\mathbb{R}^2$, $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ e γ uma curva de Jordan. Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma [P(x, y) + x \sin(\ln(1 + x^2))] dx + [Q(x, y) + (1 + |y|)^y + \cos(1 + \arctg(1 + \ln(1 + y^4)))] dy.$$