

Respostas, Sugestões e Soluções da Lista V

Abaixo você encontra respostas e sugestões de todos os exercícios. Algumas respostas são dadas de forma que dá para continuar resolvendo os exercícios pois se reduzem a integrais vistos no curso de Cálculo I. Outras são quase a solução completa do exercício. Utilize as sugestões apenas se não conseguir avançar na resolução do exercício. Provavelmente existem erros no texto. Corrija os erros e tire as suas dúvidas em aula e na monitoria. O importante é você crescer academicamente. Lembre que estas listas são apenas uma parte das coisas que envolvem este curso. São elas:

- I. As aulas e as notas de aula às quais você tem acesso via o site do curso.
- II. As aulas de monitoria e a monitoria.
- III. As listas de exercícios com sugestões e comentários que você tem acesso via o site do curso.

Para a sua experiência de aprendizagem possa ser completa sugerimos que frequente às aulas, à monitoria e que se empenhe na resolução dos exercícios.

Segue agora as sugestões e soluções desta lista.

- 1) Podemos fazer isto de duas formas: usando uma integral de superfície ou usando o Teorema do Divergente. Como já sabemos fazer a primeira forma muito bem vamos usar o Teorema do Divergente:

Seja $\vec{F}$ um campo de classe C^2 numa região (aberto e conexo) que contém o sólido Ω cuja fronteira é uma superfície fechada S . Então o Fluxo por $S = \partial\Omega$ é

$$\text{Fluxo} = \iint_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dS = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$
$$dV = dx dy dz$$

O divergente do campo é

$$\text{div}(\vec{F}) = \text{Traço}(D\vec{F}) = \text{Traço} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Assim, pelo Teorema do Divergente de Gauss, o fluxo pela superfície é dado por

$$\iiint_{\text{Sólido}} \operatorname{div}(F) dx dy dz = 0$$

Aqui a fronteira do sólido é a superfície em questão. Note que a superfície não importa pois o divergente do campo é 0.

- 2) Observe que a superfície é fechada e o campo é de classe C^∞ . Assim podemos aplicar o Teorema do Divergente de Gauss. Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(DF) = \operatorname{Traço} \begin{pmatrix} 2x & 0 & \cos z \\ y & x & -\operatorname{sen} z \\ 0 & e^y & 0 \end{pmatrix} = 3x$$

Logo o fluxo a ser calculado é

$$\text{Fluxo} = \iiint_{\text{Sólido}} \operatorname{div}(F) dx dy dz = 3 \iiint_{\text{Sólido}} x dx dy dz$$

Podemos descrever este sólido assim:

$$\text{Sólido} = \left\{ (x, y) \in \Omega_0 : \begin{matrix} 0 \leq z \leq 6 - x \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{matrix} \right\}$$

Usando esta descrição tem-se que o fluxo é

$$\begin{aligned} 3 \iint_{\Omega_0} \left[\int_0^{6-x} x dz \right] dx dy &= 3 \iint_{\Omega_0} x(6-x) dx dy = 18 \iint_{\Omega_0} x dx dy - 3 \iint_{\Omega_0} x^2 dx dy \\ &= -12\pi \end{aligned}$$

Explicações: A integral abaixo é 0 pois na primeira integral vai entregar uma função ímpar sobre um intervalo simétrico (também pode usar coordenadas polares para ver que ela é nula)

$$\iint_{\Omega_0} x dx dy = \int_0^2 \underbrace{\left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x dx \right]}_0 dy = 0$$

Por outro lado, usando coordenadas polares para descrever Ω_0 tem-se

$$\Omega_0 = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ \rho = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right.$$

Disto, e o Teorema da Mudança de Variáveis, segue que

$$\iint_{\Omega_0} x^2 dx dy = \iint_{\Omega_0} (\rho \cos \theta)^2 \cdot \rho \cdot d\theta d\rho = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right)}_{\cos^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) = 4\pi$$

Para finalizar lembramos do

Teorema de Mudança de Variáveis:

Seja $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega_1$ diferenciável e injetora e tal que $\varphi(\partial\Omega) = \partial\Omega_1$. Seja $J = \det(D(\varphi))$ a Jacobiana de φ , onde $D(\varphi)$ é a matriz Jacobiana de φ . Seja $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável a Riemann e suponha que o conteúdo das fronteiras das regiões Ω e Ω_1 seja nulo. Então

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f \circ \varphi(u, v) \cdot |J| \cdot du dv$$

- 3) Primeiramente observe que a fronteira de todas as regiões dos quatro itens são superfícies fechadas e que o Teorema do Divergente de Gauss se aplica. Ele será usado em todos os exercícios para calcular o fluxo. Você

também pode fazer os cálculos usando o Teorema de Integrais de Superfícies que fez parte da matéria da Segunda Prova. Vamos denominar os sólidos de Ω e $S = \partial\Omega$. Vamos então ver cada item agora.

(a) Tem-se

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(DF) = \operatorname{Traço} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 4 - 4y + 2z$$

$$\text{Cilindro } \Omega = \left\{ (x, y) \in \Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\} \right. \\ \left. 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

$$\text{Fluxo} = \iiint_{\Omega} (4 - 4y + 2z) dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega} dx dy dz - 4 \iiint_{\Omega} y dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz$$

$$4 \iiint_{\Omega} dx dy dz = \text{Volume do Cilindro} = 48\pi$$

$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left[\int_0^3 y dz \right] dx dy = 3 \iint_{\Omega_0} y dx dy = 0$$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left[\int_0^3 z dz \right] dx dy = \frac{9}{2} \iint_{\Omega_0} dx dy = \frac{9}{2} \text{Área}(\Omega_0) = 18\pi$$

(b) Tem-se

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(DF) = \operatorname{Traço} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2y$$

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\} \right. \\ \left. 0 \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$$

$$\text{Fluxo} = 2 \iiint_{\Omega} y dx dy dz = 2 \iint_{\Omega_0} \left[\int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} y dz \right] dx dy = 2 \iint_{\Omega_0} y \sqrt{25-x^2-y^2} dx dy$$

Usamos primeiramente coordenadas polares para resolver esta integral e depois coordenadas esféricas.

$$\Omega_0 = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ J = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Fluxo} = 2 \iint_{\Omega_0} y \sqrt{25-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sqrt{25-\rho^2} \sin \theta d\theta d\rho$$

$$\text{Fluxo} = \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^5 \rho^2 \sqrt{25-\rho^2} d\rho \right) = 2 \int_0^5 \rho^2 \sqrt{25-\rho^2} d\rho$$

Fazendo a mudança

$$\begin{cases} \rho = 5 \operatorname{sen} u \\ d\rho = 5 \cos u \, du, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^5 \rho^2 \sqrt{25 - \rho^2} \, d\rho &= 1250 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u \, du = 1250 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen}(2u)}{2} \right)^2 \, du \\ &= \frac{1250}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(4u)}{2} \, du = \frac{625}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{625}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4u) \, du = \frac{625\pi}{8} \end{aligned}$$

Usamos agora coordenadas esféricas para resolver o problema.

$$\Omega = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \varphi, \quad J = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \quad 0 \leq \rho \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Fluxo} = 2 \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 \rho^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$\text{Fluxo} = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^5 \rho^3 \, d\rho \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5^4}{4} = \frac{625\pi}{8}$$

(c) Tem-se

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(DF) = \operatorname{Traço} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \Omega_0 = \{(x, y) : \underbrace{2x + 2y + x^2 + y^2 = 2}_{(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Fluxo} &= 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \cdot \text{Volume}(\Omega) = 3 \iint_{\Omega_0} \left[\int_0^{2-2x-2y} dz \right] dx dy \\ &= 3 \iint_{\Omega_0} [2 - 2x - 2y] dx dy = 6 \text{Área}(\Omega_0) - 2 \iint_{\Omega_0} x dx dy - 2 \iint_{\Omega_0} y dx dy \\ &= 6 \cdot 4\pi - 2 \cdot (-4\pi) - 2(-4\pi) = 40\pi \end{aligned}$$

Explicações:

Para calcular as últimas duas integrais fazemos a mudança

$$\varphi : \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 1 \\ D(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \det(D(\varphi)) = 1, \quad \Omega_1: u^2 + v^2 \leq 4 \end{cases}$$

Com esta mudança tem-se

$$\iint_{\Omega_0} x dx dy = \iint_{\Omega_1} (u - 1) du dv = -\text{Área}(\Omega_1) - \underbrace{\iint_{\Omega_1} u du dv}_{\text{o valor é 0; já fizemos isto no exercício 2}} = -4\pi$$

$$\iint_{\Omega_0} y dx dy = \iint_{\Omega_1} (v - 1) du dv = -\text{Área}(\Omega_1) - \underbrace{\iint_{\Omega_1} v du dv}_{\text{o valor é 0; já fizemos isto no exercício 2}} = -4\pi$$

(d) Tem-se

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(DF) = \operatorname{Traço} \begin{pmatrix} 3x^3y & x^4 & 0 \\ -6x^2y^2 & -4x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} = -x^3y + 2z$$

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \Omega_0 : \begin{matrix} 0 \leq z \leq h \\ x^2 + y^2 \leq r^2 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Fluxo} &= \iiint_{\Omega} [-x^3y + 2z] dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left(\int_0^h [-x^3y + 2z] dz \right) dx dy \\ &= -h \iint_{\Omega_0} x^3y dx dy + h^2 \text{Área}(\Omega_0) = \pi h^2 r^2 - h \iint_{\Omega_0} x^3y dx dy = \pi h^2 r^2 = h \cdot \text{Vol}(\Omega) \end{aligned}$$

Fazemos a mudança para calcular a última integral.

$$\Omega_0 = \left\{ \begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ \rho = r, \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \right.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0} x^3y dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^5 \cos^3 \theta \sin \theta d\rho d\theta = \left(\int_0^r \rho^5 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{\rho^6}{6} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\cos^4 u}{4} \right)}_0 \bigg|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

- 4) Vamos usar novamente o Teorema do Divergente de Gauss. Desta vez a versão para o plano

Tem-se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$$

$$F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Disto segue-se que

$$D(F) = A$$

$$\operatorname{div}(F) = a + d = \operatorname{Traço}(A)$$

e logo

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(D(F)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 6$$

Onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A . Pela hipótese tem-se que

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 \end{cases}$$

Disto segue que

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Obtém-se então que

$$\text{Fluxo} = \oint_{\gamma} \langle F | N \rangle ds = \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{div}(F) dx dy = 6 \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} dx dy = 6 \operatorname{Área}(\operatorname{Int}(\gamma)) = 18\pi$$

- 5) A solução é igual ao do exercício anterior. Precisamos apenas achar os autovalores para poder calcular o divergente do campo. O polinômio característica é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2$$

cujo raízes são os autovalores

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

e logo a soma deles é 0. Disto obtém-se que

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(D(F)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Obtém-se então que

$$\text{Fluxo} = \oint_{\gamma} \langle F | N \rangle ds = \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{div}(F) dx dy = \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} 0 dx dy = 0$$

Note que o comprimento da curva não tem nenhuma relevância.

Adendo:

Se você ainda não sabe que é o polinômio característico de uma matriz, explicamos isto abaixo para você.

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é o polinômio definido por

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(\lambda Id - A) = \det \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} \\
 &= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\
 &= \lambda^2 - \text{Traço}(A)\lambda + \det(A)
 \end{aligned}$$

Sejam

λ_1 e λ_2 as raízes de $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) =$$

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

então tem-se as

$$\text{Relações de Girard} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Traço}(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) \end{cases}$$

Disto segue que se o considerarmos o campo linear

$$F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$$

então

$$\begin{aligned}
 \text{div}(F) &= \text{Traço}(D(F)) = \text{Traço}(A) \\
 &= -(\text{coeficiente de } \lambda \text{ na expressão de } p(\lambda))
 \end{aligned}$$

Uma fórmula similar vale para matrizes 3×3 . Neste caso o polinômio característico é um polinômio de grau 3. Continua valendo que

$$p(\lambda) = \det(\lambda Id - A)$$

cujas raízes denotamos por

$$\lambda_1, \quad \lambda_2 \text{ e } \lambda_3$$

A fórmula é:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \operatorname{Traço}(D(F)) = \operatorname{Traço}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ &= -(\text{coeficiente de } \lambda^2 \text{ na expressão de } p(\lambda)) \end{aligned}$$

Por exemplo, se o polinômio característica da matriz for

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 3$$

então tem-se que

$$\operatorname{div}(F) = -(-1) = 1$$

Todos os resultados provados acima para Campos Lineares no Plano vale também para Campos Lineares no Espaço. Note que, neste caso, o polinômio característico tem grau 3 e logo tem três raízes. Em particular vale que a soma das raízes do polinômio característico é igual ao traço da matriz e o seu produto é igual ao determinante da matriz. A relação com os coeficientes do polinômio característico não é bem igual.

- 6) Sejam γ_1 e γ_2 as circunferências centradas em $\vec{0}$ e de raios 2 e 3, respectivamente. (Vide também as notas de aula do dia 25.05.2018).

Tem-se que

$$\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

é uma região fechada e limitada cuja fronteira

$$\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

Para ter a orientação positiva deve-se orientar γ_2 positivamente e γ_1 negativamente (ou seja, γ_2 no sentido anti-horário e γ_1 no sentido horário).

Do Teorema de da Divergente de Green tem-se então que

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega} \langle F|N \rangle ds &= \iint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dxdy = \iint_{\Omega} \operatorname{Traço}(A) dxdy = \operatorname{Traço}(A) \iint_{\Omega} dxdy \\ &= \operatorname{Traço}(A) \cdot \text{Área}(\Omega) = 5 \cdot \operatorname{Traço}(A) \cdot \pi\end{aligned}$$

Explicações:

No exercício 4 foi calculado o divergente deste campo e isto foi usado na integral acima. Vide também as notas de aula do dia 25.05.2018 para ver mais sobre este exercício.

- 7) Trate-se aqui de Campos Lineares no Espaço. Lembramos que já foi dito anteriormente que todos os resultados para Campos Lineares no Plano valem também para Campos Lineares no Espaço. Pelos dados do exercício tem-se que

o polinômio característico de $DF(p_0)$ é

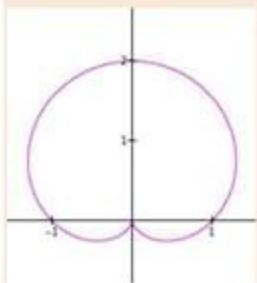
$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Segue-se que a soma das suas raízes é

$$\operatorname{div}(F(p_0)) = DF(p_0) = 1 + 2 + 7 = 10 > 0$$

Logo trata-se de uma fonte.

- 8) Na figura abaixo, seja Ω a região determinado pelo eixo $-x$ e a parte da curva acima deste eixo e denomine por $\gamma = \partial\Omega$. Então tem-se que



$$\gamma = [-1, 1] \cup \gamma_1$$

onde γ_1 é a curva pelo qual queremos calcular o fluxo.

Sendo o campo polinomial segue-se ele é de classe C^∞ e logo podemos aplicar o Teorema do Divergente de Gauss obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} \langle F|N \rangle ds + \int_{\gamma_1} \langle F|N \rangle ds &= \oint_{\gamma} \langle F|N \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} [-2z + 2x] dx dy = 0 \end{aligned}$$

Disto obtemos que

$$\int_{\gamma_1} \langle F|N \rangle ds = - \int_{[-1,1]} \langle F|N \rangle ds$$

Uma parametrização de $[-1, 1]$ e os outros dados que precisamos são:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (-x^2 + y^2, 2xy) \\ \gamma(t) &= (-1, 0) + t(1, 0), \quad t \in [0, 2] \\ \gamma'(t) &= (1, 0) \\ J(\gamma'(t)) &= (0, -1) \\ F(\gamma(t)) &= F(-1 + t, 0) = (-(-1 + t)^2, 0) \\ \langle F(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle &= \langle (-(-1 + t)^2, 0) | (0, -1) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\gamma_1} \langle F|N \rangle ds = - \int_{[-1,1]} \langle F|N \rangle ds = - \int_0^2 \langle F(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle dt = -0 = 0$$

9) Considere o campo

$$F(x, y) = (P, Q) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$
$$\oint_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{\gamma} Fds$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

ou seja a forma $Pdx + Qdy$ é fechada. Segue-se que o campo tem um potencial em qualquer aberto simplesmente conexo.

Temos dois caso a considerar

1) $\vec{0} \in \text{Int}(\gamma)$

Neste caso escolhemos um círculo δ com centro a origem e raio R dentro de $\text{Int}(\gamma)$. Este círculo é homotópico a γ . Sendo a forma acima fechada tem-se que neste caso as duas integrais de linha têm o mesmo valor, ou seja,

$$\oint_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{\delta} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

Explicações:

Para mostrar que o valor da última integral é 2π , parametrizamos o círculo e calculemos tudo necessário para calcular a integral de linha.

$$\begin{aligned}\delta(t) &= (R \cos t, R \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \\ F(\delta(t)) &= F(R \cos t, R \sin t) = \frac{1}{R^2} (R \sin t, -R \cos t) = \frac{1}{R^2} J(\delta(t)) \\ \langle F(\delta(t)) | J(\delta(t)) \rangle &= \frac{1}{R^2} \cdot \|J(\delta(t))\|^2 = \frac{1}{R^2} ((R \sin t)^2 + (-R \cos t)^2) = 1\end{aligned}$$

Logo

$$\oint_{\delta} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \langle F(\delta(t)) | J(\delta(t)) \rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

2) $\vec{0} \notin \text{Int}(\gamma)$

Neste caso temos que $\text{Int}(\gamma)$ é simplesmente conexo. Sendo a forma associada ao campo fechado, segue-se que ela é exata e logo o campo é conservativo. Sendo a curva fechada segue-se que neste caso

$$\oint_{\delta} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$$

10) Usamos primeiramente as propriedades de linearidade da integral de linha para obter que

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} f(z) dz &= \oint_{\gamma} [u(x, y) + i v(x, y)] dz = \oint_{\gamma} u(x, y) dz + i \oint_{\gamma} v(x, y) dz \\ &= \oint_{\gamma} u(x, y) dx + i \oint_{\gamma} u(x, y) dy - \oint_{\gamma} v(x, y) dy + i \oint_{\gamma} v(x, y) dx \\ &= \oint_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \left(\oint_{\gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \right)\end{aligned}$$

Note que estamos em condições para aplicar o Teorema de Stokes no Plano em cada uma das integrais (note que não é o Teorema do Divergente de Gauss que estamos aplicando e sim um resultado do qual deriva o Teorema do Divergente de Gauss). Repetimos o enunciado dele abaixo para a sua conveniência:

Teorema de Stokes no Plano

Seja γ uma curva de Jordan e o campo (P, Q) um campo de classe C^2 . Então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{Int(\gamma)} \langle \text{rot}(\vec{F}) | \vec{k} \rangle dxdy$$

Aplicando o Teorema a as duas últimas integrais acima tem-se

$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \left(\oint_{\gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy] \right) \\ &= \iint_{Int(\gamma)} \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + \iint_{Int(\gamma)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy \\ &- \iint_{Int(\gamma)} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + \iint_{Int(\gamma)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

e logo

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Explicações:

As equações de Cauchy - Riemann afirmam o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Disto segue as duas últimas integrais são ambas nulas.

11) Tratando se de fluxo apelaremos para o Teorema da Divergência de Gauss. Para isto definimos

$$\gamma = [-3, 4] \cup \underbrace{\text{Chapeu Saci}}_{\gamma_1}$$

A curva γ é a fronteira de uma região que denominamos de Ω , ou seja,

$$\gamma = \partial\Omega$$

Observe que, pela definição do Chapéu de Saci, γ é uma curva de Jordan e Ω é simplesmente conexo.

Tem-se

$$D(F) = \begin{pmatrix} 2 - 2e^y & -1 - 2xe^y \\ 2e^y & 2e^y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{Traço}(D(F)) = 2$$

Logo tem-se

$$\text{Fluxo} = \oint_{\gamma} \langle F|N \rangle ds = \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{div}(F) dx dy dz = 2 \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} dx dy dz = 2 \cdot 7\pi = 14\pi$$

Por outro lado

$$14\pi = \oint_{\gamma} \langle F|N \rangle ds = \oint_{[-3,4] \cup \gamma_1} \langle F|N \rangle ds = \oint_{[-3,4]} \langle F|N \rangle ds + \oint_{\gamma_1} \langle F|N \rangle ds$$

Assim o flux pedido é

$$\oint_{\gamma_1} \langle F|N \rangle ds = 14\pi - \oint_{[-3,4]} F ds = 14\pi + 14 = 14(\pi + 1)$$

Explicação:

Para calcular a última integral parametrizamos o intervalo $[-3, 4]$ e calculamos todas as coisas envolvidos no cálculo do fluxo (observe que este intervalo de fato é o segmento de reta que liga os pontos $(-3, 0)$ e $(4, 0)$):

$$\begin{aligned}\delta(t) &= (-3, 0) + t(1, 0), & t \in [0, 7] \\ \delta'(t) &= (1, 0) \\ J(\delta'(t)) &= (0, -1) \\ F(\delta(t)) &= F(-3 + t, 0) = (0, 2) \\ \langle F(\delta(t)) | J(\delta'(t)) \rangle &= -2\end{aligned}$$

Logo

$$\oint_{[-3, 4]} \langle F | N \rangle ds = \int_0^7 \langle F(\delta(t)) | J(\delta'(t)) \rangle dt = \int_0^7 -2 dt = -14$$

Respondendo ao item d respondemos também ao item c. Estes dois pontos são da forma

$$(a, 0), (a + 7, 0)$$

pois não podemos mudar o chapéu e sim apenas transladar. Vamos parametrizar este segmento:

$$\begin{aligned}\delta(t) &= (a, 0) + t(1, 0), & t \in [0, 7] \\ \delta'(t) &= (1, 0) \\ J(\delta'(t)) &= (0, -1) \\ F(\delta(t)) &= F(a + t, 0) = (0, 2) \\ \langle F(\delta(t)) | J(\delta'(t)) \rangle &= -2\end{aligned}$$

Estes dados mostram que o fluxo por este segmento de reta também é de -14 .

Isto mostra que se mudamos o chapéu de lugar o resultado continua o mesmo. Logo não é possível mudar o chapéu para que o fluxo por ele seja igual a zero.

- 12) Vamos calcular o rotacional do campo pois neste caso trata-se de Trabalho.

$$\text{rot}(F) = \left(0, 0, \frac{\partial(4y^2x - 2x)}{\partial x} - \frac{\partial(-(x^2y + 3x - 2y))}{\partial y} \right) = (0, 0, x^2 + 4y^2 - 4)$$

Pelo Teorema de Stokes no Plano tem-se que

$$V(\gamma) = \oint_{\gamma} F d\gamma = \iint_{\text{Int}(\gamma)} \langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle dx dy = \iint_{\text{Int}(\gamma)} (x^2 + 4y^2 - 4) dx dy$$

O integrando

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$$

é menor ou igual a zero apenas no interior da elipse γ_0

$$\text{Int}(\gamma_0) = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\} = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} \leq 1 \right\}$$

e logo

$$V(\gamma_0) \leq 0$$

Usando isto obtém-se que

$$V(\gamma) \geq V(\gamma \cap \gamma_0) \geq V(\gamma_0)$$

Vamos calcular o valor de $V(\gamma_0)$.

$$\begin{aligned}
 V(\gamma_0) &= \iint_{Int(\gamma_0)} (x^2 + 4y^2 - 4) dx dy = \iint_{Int(\gamma_0)} (x^2 + (2y)^2) dx dy - 4 \underbrace{\iint_{Int(\gamma_0)} dx dy}_{\text{Área}(Int(\gamma_0)) = 2\pi} \\
 &= \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Explicações

Para calcular a última integral fazemos a mudança

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{\rho}{2} \sin \theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad J = \frac{\rho}{2} \end{cases}$$

Logo

$$\iint_{Int(\gamma_0)} (x^2 + (2y)^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho^3}{2} d\rho d\theta = \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

13) Vamos calcular o rotacional do campo

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{pmatrix} = (0, -2z, 3y - 1)$$

Temos que calcular a integral

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS$$

(a) Note que a superfície é o gráfico da função

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

cuj domínio é a projeção do deste gráfico em cima do plano- xy . Esta projeção chamamos de

$$\Omega_0 = \{(x, y) : 4 - x^2 - y^2 = 0\}$$

que é um disco de raio igual a 2. Este gráfico também é uma superfície de revolução mas vamos dar a parametrização como gráfico que é

$$\begin{aligned}\psi: \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(u, v) &= (u, v, 4 - u^2 - v^2) \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, -2u) \\ \psi_v(u, v) &= (0, 1, -2v)\end{aligned}$$

$$\text{rot}(F) \circ \psi(u, v) = \text{rot}(F)(u, v, 4 - u^2 - v^2) = (0, -2(4 - u^2 - v^2), 3v - 1) = (0, 2u^2 + 2v^2 - 8, 3v - 1)$$

$$\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

$$\langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle = 2u(2u^2 + 2v^2 - 8) + 3v - 1 = 4u^3 + 4uv^2 - 16u + 3v - 1$$

$$N = \frac{\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)}{\|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\|}$$

$$dS = \|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\| \cdot dudv$$

Assim tem-se que

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = \iint_S \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle dudv =$$

$$\iint_{\Omega_0} [4u^3 + 4uv^2 - 16u + 3v - 1] dudv$$

Para calcular a última integral fazemos a mudança

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad J = \rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0} [4u^3 + 4uv^2 - 16u + 3v - 1] du dv \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [4\rho^3 \cos \theta - 16\rho \cos \theta + 3\rho \sin \theta - 1] \rho d\rho d\theta = \\ 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho^3 \cos \theta] d\rho d\theta - 16 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho \cos \theta] d\rho d\theta + 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho \sin \theta] d\rho d\theta \\ - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^1 d\rho d\theta}_{\text{Área}(\Omega_0) = 4\pi} = -4\pi \end{aligned}$$

Explicações:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho^n \cos \theta] d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^n d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho^n \sin \theta] d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^n d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) = 0$$

$$n \in \{1, 3\}$$

(b) Para poder aplicar o Teorema da Divergência de Gauss fechamos a superfície com o disco Ω_0 (considerado como subconjunto do Espaço) e chamamos o sólido limitado por Ω . Temos então que

$$\partial\Omega = S \cup \Omega_0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = \operatorname{div}(0, -2z, 3y - 1) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(-2z)}{\partial y} + \frac{\partial(3y - 1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Pelo Teorema da Divergência tem-se

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) dx dy dz = 0$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\partial\Omega} \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS = \iint_{S \cup \Omega_0} \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS \\ &= \iint_S \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS + \iint_{\Omega_0} \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS \end{aligned}$$

Assim tem-se que

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS = - \iint_{\Omega_0} \langle \operatorname{rot}(F) | N \rangle dS$$

Uma parametrização de Ω_0 é

$$\begin{aligned} \psi: \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(u, v) &= (u, v, 0) \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, 0) \\ \psi_v(u, v) &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}(F) \circ \psi(u, v) = \operatorname{rot}(F)(u, v, 0) = (0, 0, 3v - 1) =$$

$$\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$\langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | (u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle = 3v - 1$$

$$N = \frac{-\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)}{\|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\|} = -\vec{k}$$

$$dS = dudv$$

Assim tem-se que

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = \iint_S \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle dudv =$$

$$\iint_{\Omega_0} [3v - 1] dudv = 3 \iint_{\Omega_0} v dudv - \iint_{\Omega_0} dudv = -4\pi$$

pois

$$\iint_{\Omega_0} v dudv = 0$$

com já vimos em vários outros momentos. Você pode fazer mudança para coordenadas polares (feito no item a) ou você pode usar o argumento de função ímpar integrado sobre um intervalo simétrico em relação à origem. Como isto já foi feito não faremos de novo. Qualquer dúvida releia os itens (a) e (b) deste exercício

(c) Nesta parte vamos usar o Teorema de Stokes:

Ele nos diz que

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = \int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = \int_a^b \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle dt$$

Vamos então parametrizar a fronteira da superfície. Ela é

$$\partial S = \{(x, y, 0) : 4 - x^2 - y^2 = 0\}$$

uma circunferência de raio 2 centrada na origem. Com isto temos a seguinte parametrização e dados necessários para calcular a integral.

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \Gamma'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \\ F \circ \Gamma(t) &= (2(\cos t + \sin t) - 4, 6 \sin(2t), 0) \\ \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle &= -2 \sin(2t) + 8 \sin(t) + 24 \sin(t) \cos^2(t) - 4 \sin^2(t)\end{aligned}$$

Integrando tem-se

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS &= \int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = \int_a^b \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2 \sin(2t) + 8 \sin(t) + 24 \sin(t) \cos^2(t) - 4 \sin^2(t)] dt = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} [\sin(2t)] dt + 8 \int_0^{2\pi} [\sin(t)] dt + 24 \int_0^{2\pi} [24 \sin(t) \cos^2(t)] dt - 4 \int_0^{2\pi} [\sin^2(t)] dt = -4\pi\end{aligned}$$

Explicações:

As três primeiras integrais são todas nulas. Nas duas primeiras se trata de funções periódicas em um intervalo cujo comprimento é igual a um múltiplo do período. Na terceira trata-se de uma substituição simples e a função também é periódica. A última integral é igual a π ; para ver isto basta usar a fórmula de ângulo duplo:

$$\sin^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

- 14) Tudo que se precisa fazer já foi indicado no enunciado do exercício. Vamos então parametrizar a fronteira da superfície e fazer os cálculos.

$$\partial S = \{(x, y, 0) : 4 - x^2 - y^2 = 0\}$$

uma circunferência de raio 2 centrada na origem. Com isto temos a seguinte parametrização e dados necessários para calcular a integral.

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \Gamma'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \\ F \circ \Gamma(t) &= (0, 2 \cos t, 4 \sin^2 t) \\ \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle &= 4 \cos^2(t)\end{aligned}$$

Integrando tem-se

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS &= \int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = \int_a^b \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = 4\pi\end{aligned}$$

Se calcular a integral de superfície precisamos de notar que a superfície é um gráfico. Vamos ver isto e arrumar todos os elementos para fazer os cálculos.

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{pmatrix} = (2y, \quad 1, \quad 1)$$

Temos que calcular

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS$$

Como já foi notado a superfície é um gráfico, mais especificamente, o gráfico da função

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

cuj domínio é a projeção do deste gráfico em cima do plano- xy . Esta projeção chamamos de

$$\Omega_0 = \{(x, y) : 4 - x^2 - y^2 = 0\}$$

que é um disco de raio igual a 2. Este gráfico também é uma superfície de revolução mas vamos dar a parametrização como gráfico que é

$$\begin{aligned}\psi: \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(u, v) &= (u, v, 4 - u^2 - v^2) \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, -2u) \\ \psi_v(u, v) &= (0, 1, -2v)\end{aligned}$$

$$\text{rot}(F) \circ \psi(u, v) = \text{rot}(F)(u, v, 4 - u^2 - v^2) = (8 - 2u^2 - 2v^2, u, v^2) =$$

$$\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

$$\langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle = 2u(8 - 2u^2 - 2v^2) + 2uv + v^2 = 16u - 4u^3 - 4uv^2 - 16u + 2uv + v^2$$

$$N = \frac{\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)}{\|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\|}$$

$$dS = \|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\| \cdot dudv$$

Assim tem-se que

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS &= \iint_S \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle dudv = \\ &= \iint_{\Omega_0} [16u - 4u^3 - 4uv^2 - 16u + 2uv + v^2] dudv = \\ &= 16 \iint_{\Omega_0} u dudv - 4 \iint_{\Omega_0} u^3 dudv - 4 \iint_{\Omega_0} uv^2 dudv - 16 \iint_{\Omega_0} u dudv \\ &\quad + 2 \iint_{\Omega_0} uv dudv + \iint_{\Omega_0} v^2 dudv = 4\pi\end{aligned}$$

Explicações:

Todas as integrais já foram feitas em exercícios anteriores. Apenas a última integral é diferente de zero. Qualquer dificuldade que você sentir veja o que foi feito no exercício anterior e em outros exercícios. Por exemplo, usando coordenadas polares temos que a última integral é calculada assim:

$$\iint_{\Omega_0} v^2 dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) = 4\pi$$

e, para dar mais um exemplo,

$$\iint_{\Omega_0} u^3 dudv = \int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-v^2}}^{\sqrt{4-v^2}} u^3 du \right) dv = 0$$

0 pois a função é ímpar e integrada num intervalo simétrica.

- 15) Você pode fazer os cálculos usando uma integral de linha. Neste caso você deve notar que a curva consiste de três segmentos de reta. Se colocarmos

$$p_1 = (3,0,0), \quad p_2 = (0,3,0), \quad p_3 = (0,0,6)$$

então os segmentos de reta são

$$[p_1, p_2], \quad [p_2, p_3], \quad [p_3, p_1]$$

pois a curva é orientada positivamente. Observe que uma parametrização de cada um dos segmentos é

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= p_1 + t(p_2 - p_1) \\ \gamma_2(t) &= p_2 + t(p_3 - p_2) \\ \gamma_3(t) &= p_3 + t(p_1 - p_3)\end{aligned}$$

e as suas derivadas são

$$\begin{aligned}\gamma_1'(t) &= p_2 - p_1 \\ \gamma_2'(t) &= p_3 - p_2 \\ \gamma_3'(t) &= p_1 - p_3\end{aligned}$$

O resto destas contas você mesmo pode fazer. Aqui vamos calcular a integral de linha usando o Teorema de Stokes que nos diz que

$$\int_a^b \langle F \circ \Gamma(t) | \Gamma'(t) \rangle dt = \int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = \iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS$$

Primeiramente identificamos a superfície como sendo o gráfico da função

$$f(x, y) = 6 - 2x - 2y$$

sobre o domínio que é a projeção da superfície em cima do plano- xy .

$$\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$$

Para obter a função acima basta isolar a variável z da equação $2x + 2y + z = 6$ obtendo $f(x, y) = z = 6 - 2x - 2y$. Para obter o domínio da função basta fazer $z = 0$ e usar o fato de estar no primeiro quadrante. Obtém-se um triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,3)$.

Agora podemos facilmente parametrizar a superfície

$$\psi: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(u, v) = (u, v, 6 - 2u - 2v)$$

$$\psi_u(u, v) = (1, 0, -2)$$

$$\psi_v(u, v) = (0, 1, -2)$$

$$\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (2, 2, 1)$$

Também pode se achar o vetor normal à superfície usando o que foi ensinado no Curso de Geometria e Vetores: olhando os coeficientes das variáveis do plano. Se você se lembrar disto use isto e justifique isto de forma devido.

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{pmatrix} = (1, 1, -2y)$$

$$\text{rot}(F) \circ \psi(u, v) = \text{rot}(F)(u, v, 6 - 2u - 2v) = (1, 1, -2v)$$

$$\langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle = \langle (1, 1, -2v) | (2, 2, 1) \rangle = 4 - 2v$$

Usando estes dados tem-se

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = \iint_{\Omega_0} \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle dudv =$$

$$\iint_{\Omega_0} [4 - 2v] dudv = \int_0^3 \left(\int_0^{3-u} [4 - 2v] dv \right) du =$$

$$\int_0^3 [12 - 4u - (u - 3)^2] du =$$

$$12u - 2u^2 - \frac{(u - 3)^3}{3} \Big|_0^3 = 27$$

**Você chegou na metade da lista. Continue estudando e assistindo às aulas.
Não deixe de frequentar à monitoria e às aulas de monitoria.**

Bons estudos

Prof. Juriaans, S.O.

- 16) Neste exercício suponha-se que a distribuição de massa do disco seja uniforme. Isto é importante para que valiam as fórmulas de centro de massa a que nos referimos.

Sejam

$$\Omega_0 = \{(x, y) : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

o disco de raio a e centro $(a, 0)$ e $\gamma = \partial\Omega_0$ a sua fronteira. A sua área é

$$A = \iint_{\Omega_0} dx dy = \text{Área}(\Omega_0) = \pi a^2$$

Assim o centro de massa deste disco é dado por

$$\begin{aligned} (a, 0) = (x_c, y_c) &= \left(\frac{1}{A} \iint_{\Omega_0} x dx dy, \frac{1}{A} \iint_{\Omega_0} y dx dy \right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi a^2} \iint_{\Omega_0} x dx dy, \frac{1}{\pi a^2} \iint_{\Omega_0} y dx dy \right) \end{aligned}$$

Disto obtém-se que

$$a = \frac{1}{\pi a^2} \iint_{\Omega_0} x dx dy \quad \text{e} \quad \iint_{\Omega_0} y dx dy = 0$$

e logo

$$\iint_{\Omega_0} x dx dy = \pi a^3$$

Para calcular a integral pedido usamos a integral anterior e o Teorema de Stokes no Plano (note que $\text{Int}(\gamma) = \Omega_0$).

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F dy &= \iint_{\Omega_0} \langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle dx dy = \iint_{\Omega_0} \left(\frac{\partial(2x^2(1+xy))}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 4 \cdot \iint_{\Omega_0} x dx dy = 4\pi a^3\end{aligned}$$

Assim a integral pedido

$$\int_{\gamma} F dy = 4\pi a^3$$

Se você gosta de fazer contas para testar seus conhecimentos e habilidades em calcular integrais, faça então esta integral sem apelar para a fórmula que usamos.

- 17) Você pode calcular esta integral ou como uma integral de linha ou notando que as condições para aplicar o Teorema de Stokes no Plano estão satisfeitas. Vamos fazer os cálculos de duas formas:

Calculando a integral de linha:

Tem-se que

$$\gamma = \underbrace{[-1, 1]}_{\gamma_1} \cup \underbrace{\{(x, y) : 0 \leq y, 1 = x^2 + y^2\}}_{\gamma_2}$$

e o campo é

$$F(x, y) = (x, y)$$

Note que o campo é radial e logo é normal à reta tangente da curva γ_2 (não importa qual seja a sua parametrização). Disto segue que o campo não realiza trabalho ao longo desta curva, ou seja,

$$\int_{\gamma_2} F d\gamma_2 = 0$$

Uma parametrização da curva γ_1 é

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, 0), & t &\in [-1, 1] \\ \gamma_1'(t) &= (1, 0) \\ F(\gamma_1(t)) &= F(t, 0) = (t, 0) \\ \langle F(\gamma_1(t)) | \gamma_1'(t) \rangle &= \langle (t, 0) | (1, 0) \rangle = t\end{aligned}$$

Usando estes dados tem-se

$$\int_{\gamma_2} F d\gamma_2 = \int_{-1}^1 \langle F(\gamma_1(t)) | \gamma_1'(t) \rangle dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

Assim

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F d\gamma_2 = 0$$

Usando o Teorema de Stokes no Plano:

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \iint_{Int(\gamma)} \langle rot(F) | \vec{k} \rangle = \iint_{Int(\gamma)} \underbrace{\left(\frac{\partial(y)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y} \right)}_0 dx dy = 0$$

- 18) Isto já foi comentado no adendo do exercício 5. Vale reforçar que a matriz jacobiana de um campo linear sempre é constante e logo o divergente do campo, o traço da matriz jacobiana, também é constante. Assim, se

$$F(p) = Ap^t$$

é um campo linear, onde A é a matriz jacobiana do campo, então o fluxo do campo pela superfície de uma região compacta é

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F|N \rangle dS = \text{Traço}(A) \cdot \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

19) Pode-se fazer os cálculos parametrizando a curva e aplicando a definição da integral de linha. Outra forma é perceber que pode-se aplicar o Teorema de Stokes no Espaço. Vamos fazer os cálculos com este inoque.

Denotamos por S a superfície cuja fronteira é a curva Γ , ou seja

$$\Gamma = \partial S$$

Note que

S é um triângulo

e pode ser descrito como o gráfico de uma função, $f(x, y)$, cuja domínio, Ω_0 , é a projeto de S sobre o plano $-xy$. Notando que tudo acontece no primeiro quadrante do espaço obtém-se que Ω_0 é o triângulo cujo vértices são os pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Este triângulo pode ser descrito assim:

$$\Omega_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Para obter a função note que os três pontos determinam um plano cuja equação cartesiana é

$$x + y + z = 1$$

Disto obtém-se, isolando a variável z ,

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

Com estes dados obtém-se uma parametrização da superfície:

$$\psi: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$$

$$\psi_u(u, v) = (1, 0, -1)$$

$$\psi_v(u, v) = (0, 1, -1)$$

$$\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) = (1, 1, 1)$$

Este último vetor você também poderia obter olhando para os coeficientes das variáveis da equação do plano. Isto é ensinado no curso de Geometria e Vetores.

Temos também

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{pmatrix} = (-2z, -2x, -2y)$$

$$\text{rot}(F) \circ \psi(u, v) = \text{rot}(F)(u, v, 1 - u - v) = (-2 + 2u + 2v, -2u, -2v)$$

$$\langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle =$$

$$\langle (-2 + 2u + 2v, -2u, -2v) | (1, 1, 1) \rangle = -2$$

Temos agora todos os dados para aplicar o Teorema de Stokes no Espaço.

$$\int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = \iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = \iint_S \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) \rangle dS$$

$$=$$

$$-2 \iint_S dS = -2 \text{Área}(S) = -2 \iint_{\Omega_0} dS = -2 \iint_{\Omega_0} \|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\| du dv =$$

$$\begin{aligned} -2 \iint_{\Omega_0} \|(1, 1, 1)\| dudv &= -2\sqrt{2} \iint_{\Omega_0} dudv = -2\sqrt{2} \text{Área}(\Omega_0) = -2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

O resultado pedido é

$$\int_{\Gamma=\partial S} F d\Gamma = -\sqrt{2}$$

20) Este exercício criei em homenagem a um professor meu quando eu fiz o curso de Doutorado em Matemática no IME-USP. Ele vivia me pedindo encontrar um Chapéu de Saci de curvatura média constante. Isto resolveria um famoso problema de Plateau.

Você mesmo pode esboçar alguns Chapéus de Saci. Este exercício foi pensado para você aplicar ao Teorema do Divergente de Gauss no Espaço. A circunferência não foi especificada por causa da pergunta do item (c). Vamos aos cálculos. É bom notar que o campo é linear.

Vamos começar calculando

$$\text{div}(F) = \text{Traço}(D(F)) = \text{Traço} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right) = 4$$

Denomine por Ω o sólido cuja fronteira é

$$\partial\Omega = \text{Int}((\partial(S) \cap \pi)) \cup S$$

e aplique o Teorema do Divergente de Gauss obtendo

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F|N \rangle dS = \iiint_{\Omega} \text{div}(F) dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 4 \text{Vol}(\Omega) = 4 \cdot 3 = 12$$

Por outro lado tem-se que

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F|N \rangle dS = \iint_{Int((\partial(S) \cap \pi))} \langle F|N \rangle dS + \iint_S \langle F|N \rangle dS$$

e logo o fluxo procurado é

$$\iint_S \langle F|N \rangle dS = 12 - \iint_{Int((\partial(S) \cap \pi))} \langle F|N \rangle dS$$

Temos que parametrizar

$$Int((\partial(S) \cap \pi))$$

que é um disco, D , cuja fronteira coincide com a fronteira de S , ou seja,

$$\partial \left(Int((\partial(S) \cap \pi)) \right) = \partial S$$

Sejam

$$(a, b, 0) \text{ e } R \text{ respectivamente o centro e raio de } D$$

e

$$\Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Então uma parametrização do disco é

$$\begin{aligned} \psi: \Omega_0 &\rightarrow D \\ \psi(u, v) &= (a + u, b + v, 0) \\ \psi_u(u, v) &= (1, 0, 0) \\ \psi_v(u, v) &= (0, 1, 0) \\ \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v) &= (0, 0, 1) \\ dS &= \|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\| du dv = \|0, 0, 1\| du dv = du dv \end{aligned}$$

Estando o disco contido no Plano- xy e precisando do normal exterior de Ω , tem-se pela definição do Chapéu de Saci que o vetor normal

$$N = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} F \circ \psi(u, v) &= F(a + u, b + v, 0) \\ &= (2a + 2u - b - v, a + b + u + v, 3a + 3u + 5b + 5v) \end{aligned}$$

$$\langle F \circ \psi(u, v) | N \rangle = 3a + 5b + 3u + 5v$$

Logo tem-se que

$$\begin{aligned} \iint_{Int((\partial(S) \cap \pi))} \langle F | N \rangle dS &= \iint_{D \cap \Omega_0} [3a + 5b + 3u + 5v] dudv = \\ &= (3a + 5b) \underbrace{\iint_{\Omega_0} dudv}_{\pi R^2} + 3 \underbrace{\iint_{\Omega_0} ududv}_0 + 5 \underbrace{\iint_{\Omega_0} vdudv}_0 \end{aligned}$$

As duas integrais já foram calculadas várias vezes em exercícios anteriores e mostradas serem nulas de duas formas.

Logo tem-se que

$$\iint_S \langle F | N \rangle dS = 12 - \iint_{Int((\partial(S) \cap \pi))} \langle F | N \rangle dS = 12 - (3a + 5b) \cdot \pi R^2$$

Note que o fluxo depende tanto do centro do disco quanto do raio do disco.

Quando o raio

$$R = 2$$

tem-se que

$$\iint_S \langle F|N \rangle dS = 12 - 4(3a + 5b) \cdot \pi$$

Este fluxo é nulo se e somente se

$$\begin{aligned} 12 - 4(3a + 5b) \cdot \pi &= 0 \Rightarrow \\ 3a + 4b &= \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

Em geral o fluxo é nulo se e somente se

$$\begin{aligned} 12 - (3a + 5b) \cdot \pi R^2 &= 0 \Rightarrow \\ 3a + 5b &= \frac{12}{\pi R^2} \end{aligned}$$

Isto mostra que o fluxo

$$\iint_S \langle F|N \rangle dS = 0$$

se o somente se

$$\partial S = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, 3a + 5b = \frac{12}{\pi R^2}\}$$

ou seja, os disco cujos centros (a, b) estão em cima de uma mesma reta

$$3a + 5b = d$$

e os seus raios são iguais, sendo o valor do raio R determinado pela constante $d > 0$ da reta e sendo a relação ente o raio e a constante dado pela equação

$$R^2 = \frac{12}{\pi d}$$

Se o raio for igual a 2, a reta, como vimos a cima, é

$$3a + 4b = \frac{3}{\pi}$$

Vamos ver o que acontece com um disco cujo centro está sobre a reta

$$3a + 4b = 0$$

No caso geral provamos que

$$\iint_S \langle F|N \rangle dS = 12 - 4(3a + 5b) \cdot \pi$$

e logo , como $3a + 4b = 0$, tem-se que se o centro do disco estiver sobre esta reta então o fluxo

$$\iint_S \langle F|N \rangle dS = 12$$

independentemente do tamanho do raio do disco.

21) Vamos resolver as equações. Muitas delas já foram resolvidas em outras listas ou nas notas de aula.

- (a) Já foi feito de várias formas nas notas de aula. Primeiramente foi mostrado que ela não é fechada e depois encontramos três tipos de fator integrantes e resolvendo a equação em cada um dos casos. Vamos rever todos estes casos:

$$-ydx + xdy = 0$$

E não é exata pois

$$-1 = \frac{\partial(-y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

Verificamos que existe um fator integrante da forma

$$\mu = \mu(x)$$

para isto mostramos que a função a seguir depende somente da variável x :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 1}{x} = -\frac{2}{x}$$

Logo

$$\mu(x) = e^{\int (-2/x) dx} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando a equação original

$$-ydx + xdy = 0$$

pelo fator integrante obtém-se a seguinte equação que agora é exata

$$-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy = 0$$

Nos cursos anteriores de Cálculo você aprendeu como resolver:

Tem-se que achar uma função potencial f tal que

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}\right)$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Da última equação obtém-se

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int \frac{1}{x} dy = \frac{y}{x} + h(x)$$

Derivando esta função obtida em relação à variável x e igualando à derivada parcial do sistema obtém-se

$$-\frac{y}{x^2} + h'(x) = \frac{\partial(\frac{y}{x} + h(x))}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

Segue-se que

$$h'(x) = 0$$

e logo $h(x)$ é uma função constante.

Assim o potencial procurado é

$$f(x, y) = c + \frac{y}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Outra solução

Vamos verificar se existe um fator integrante do tipo

$$\mu = \mu(y)$$

Para isto é só ver que a função a seguir depende somente da variável y .

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{1 - (-1)}{-y} = -\frac{2}{y}$$

Logo temos que

$$\mu(x) = e^{\int (-2/y) dx} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando a equação original

$$-y dx + x dy = 0$$

pelo fator integrante obtém-se a seguinte equação que agora é exata

$$-\frac{1}{y} dx + \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Tem-se que achar uma função potencial f tal que

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{1}{y}, \frac{x}{y^2}\right)$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

Da última equação obtém-se

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = - \int \frac{1}{y} dx = -\frac{x}{y} + h(y)$$

Derivando esta função obtida em relação à variável y e igualando à derivada parcial do sistema obtém-se

$$\frac{y}{y^2} + h'(y) = \frac{\partial(-\frac{x}{y} + h(y))}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$$

Segue-se que

$$h'(y) = 0$$

e logo $h(y)$ é uma função constante.

Assim o potencial procurado é

$$f(x, y) = c - \frac{x}{y}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Terceira solução:

$$\mu = \mu(x, y)$$

Para esta equação também existe um fator integrante que é função de (x, y) . De fato, vimos em outras aulas que a forma

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

é fechada. Isto por que tem-se

$$\frac{\partial(\frac{-y}{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial(\frac{x}{x^2 + y^2})}{\partial x}$$

Assim em qualquer domínio simplesmente conexo ela tem um potencial. Note que isto diz que

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

é um fator integrante da equação

$$-ydx + xdy = 0$$

Temos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Integrando em relação à variável x e depois derivando em relação à variável y e igualando usando o sistema (já foi feito com frequência e as integrais são as de Cursos anteriores) obtém-se

$$f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + c, c \text{ um constante}$$

Note que em todos os três casos as curvas de níveis são retas passando pela origem

$$y = cx \text{ ou } x = cy \text{ sendo } c \text{ uma constante}$$

(b) Podemos escrever a equação da seguinte forma

$$\langle (3,2) | \nabla f \rangle = 0$$

Isto mostra que as curvas de níveis da função são retas paralelas à direção $(3,2)$. Assim tem-se que

$$\nabla f(x, y) = \lambda(-2, 3), \quad \lambda = \lambda(x, y)$$

Podemos supor $\lambda = 1$ obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução

$$f(x, y) = -2x + 3y + c, \quad c \text{ uma constante}$$

(c) Procedendo como no item anterior obtém-se

$$\nabla f(x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda = \lambda(x, y)$$

Podemos supor $\lambda = 1$ obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$$

Este sistema tem como solução

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c, \quad c \text{ uma constante}$$

(d) Neste caso podemos escrever a equação como

$$\langle (1, -1) | \nabla f \rangle = 0$$

Isto mostra que as curvas de níveis da função são retas paralelas à direção $(1, -1)$. Assim tem-se que

$$\nabla f(x, y) = \lambda(1, 1), \quad \lambda = \lambda(x, y)$$

Podemos supor $\lambda = 1$ obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$$

Este sistema tem como solução

$$f(x, y) = x + y + c, \quad c \text{ uma constante}$$

(e) Podemos escrever a equação como

$$\langle (x, y) | \nabla f \rangle = 0$$

Assim tem-se que

$$\nabla f(x, y) = \lambda(-y, x), \quad \lambda = \lambda(x, y)$$

Podemos supor $\lambda = 1$ obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$$

que é equivalente em resolver a equação

$$-ydx + xdy = 0$$

Mas esta equação já foi resolvida no primeiro item.

22) Os Teorema de Stokes requerem um vetor normal definida na superfície toda e isto não existe se a superfície não for orientável. Uma superfície de nível de uma função tem um vetor normal globalmente definido: o gradiente da função, no caso o mesmo for não nulo em todo ponto da superfície de nível. Se uma superfície for não orientável então mostra-se que ela contem uma curva fechada e um vetor que quando "transportado paralelamente" não volta ao seu estado de partida. Com estes dois dados é possível colocar uma Faixa de Möbius imersa nesta superfície. Procure mais sobre estas coisas nos livros textos e outros livros. Para este curso o que está aqui basta.

23) Vamos primeiramente calcular

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2+y^2} & x\sqrt{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(0, 0, 3\sqrt{x^2+y^2})$$

Um vetor normal à tampa é o vetor

$$N = \vec{k}$$

e logo

$$\langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Se o container tiver altura igual h então uma parametrização da tampa é dada por

$$\begin{aligned} \psi: \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(u, v) &= (u, v, h) \\ \Omega_0 &= \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\} \\ dS &= dudv \text{ (falta você verificar isto)} \end{aligned}$$

Chamamos a tampa de S e obtemos:

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS &= \iint_S \langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle dS \\ &= \iint_{\Omega_0} \langle \text{rot}(F) \circ \psi(u, v) | \vec{k} \rangle dudv = 3 \iint_{\Omega_0} \sqrt{u^2 + v^2} dudv\end{aligned}$$

Nesta altura você já sabe usar coordenadas polares para resolver esta integral. Após substituir as coordenadas polares e a Jacobiana obtém-se

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS &= 3 \iint_{\Omega_0} \sqrt{u^2 + v^2} dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 d\rho d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

- 24) Quase tudo fica igual ao exercícios anterior. Na parametrização da tampa mudamos somente o raio de Ω_0 enquanto o resto não sofre mudanças. Cheque isto você mesmo.

Vamos olhar o caso em que o raio da base seja igual a 1 e o campo é

$$F(x, y, z) = (1, 1, -2)$$

Neste caso

$$\begin{aligned}\text{rot}(F) &= \vec{0} \\ \langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle &= 0\end{aligned}$$

e logo

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = 0$$

Olhemos agora o caso em que o raio da base seja igual a 1 e o campo é

$$F(x, y, z) = (-z, 0, y)$$

Tem-se

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z & 0 & y \end{pmatrix} = (1, -1, 0)$$

$$\langle \text{rot}(F) | \vec{k} \rangle = 0$$

e logo

$$\iint_S \langle \text{rot}(F) | N \rangle dS = 0$$

- 25) A curva representa uma circunferência de raio 3 centrada na origem. Note que podemos tanto calcular a integral de linha quanto apelar para o Teorema de Stokes no Plano.

Calculando a Integral de Linha

$$\int_{\gamma} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -3 \sin t dt \\ dy = 3 \cos t dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \int_0^{2\pi} [81 + 81 \sin^2(\theta) - 243 \sin^4(\theta)] d\theta \\ &= 162\pi + 81 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{\pi} - 234 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{243\pi}{4} \end{aligned}$$

Para resolver as integrais, mude para ângulo duplo. Se não se lembrar disto, abaixo estão todas as fórmulas que você precisa para calcular as integrais.

$$\operatorname{sen}^4 \theta = \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{4}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{4} = \frac{1 + \cos(4\theta)}{8}$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

Usando Stokes

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} \left(\frac{\partial(x^3 + 3xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^3)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 3 \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} x^2 dx dy \end{aligned}$$

Esta integral já fizemos muitas vezes. Use coordenadas polares, não se esquecendo da Jacobiana, obtendo

$$\begin{aligned} 3 \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} x^2 dx dy &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta \\ &= 3 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right)}_{\pi} \underbrace{\left(\int_0^3 \rho^3 d\rho \right)}_{\frac{81}{4}} = \frac{243\pi}{4} \end{aligned}$$

- 26) Para poder aplicar o Teorema de Stokes fechamos a curva utilizando o segmento de reta que liga os pontos (0,0) e (4,0). Chamamos este segmento de γ_1 . Note que γ , da forma como foi dado no enunciado, é positivamente orientada. Logo para poder aplicar o Teorema de Stokes invertemos a sua orientação.

$$\begin{aligned}
 \oint_{-\gamma \cup \gamma_1} ydx + x^2 dy &= \iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} (2x - 1) dx dy \\
 &= 2 \iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} x dx dy - \iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} dx dy
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma_1} ydx + x^2 dy - \oint_{\gamma} ydx + x^2 dy \\
 = -\text{Área}(Int(-\gamma \cup \gamma_1)) + 2 \iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} x dx dy
 \end{aligned}$$

$$\text{Área}(Int(-\gamma \cup \gamma_1)) = \int_0^4 x(4-x) dx = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\iint_{Int(-\gamma \cup \gamma_1)} x dx dy = \int_0^4 \left(\int_0^{x(4-x)} x dy \right) dx = \int_0^4 x^2(4-x) dx = \frac{256}{3} - 64 = \frac{64}{3}$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 4], \quad x = t, \quad y = 0, \quad dx = dt, \quad dy = 0 dt$$

$$\oint_{\gamma_1} ydx + x^2 dy = \int_0^4 0 dt = 0$$

Logo tem-se que

$$-\oint_{\gamma} ydx + x^2 dy = -\frac{32}{3} + 2 \cdot \frac{64}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

Assim

$$\oint_{\gamma} ydx + x^2 dy = -32$$

27) Esta é uma integral dupla e você já sabe fazer isto. Mesmo assim vamos calcular esta integral. Faça a seguinte mudança

$$(*) \begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \\ 0 \leq u \leq 4 \\ -4 \leq v \leq 0 \end{cases}$$

Note que não temos x, y em função de u, v e logo ao calcular a Jacobiana você deve ter cuidado: ela é a inversa multiplicativo da Jacobiana da mudança acima. Para evitar isto você pode escrever x, y em função de u, v e calcular então a Jacobiana normalmente. Neste caso você teria a seguinte mudança

$$(**) \begin{cases} x = \frac{2u}{3} + v \\ y = \frac{u}{3} - \frac{v}{3} \end{cases}$$

A matriz Jacobiana de $(*)$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo a Jacobiana é

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3$$

Disto temos que a Jacobiana a ser usada nos cálculos é

$$\frac{1}{J} = -\frac{1}{3}$$

que é igual à Jacobiana de (**).

Tendo feito todos os preparativos para aplicar o Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais Duplas temos que a área pedido é

$$\int_0^4 \int_{-4}^0 \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

e a massa pedido é

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{-4}^0 3 \cdot \left(\frac{2u}{3} + v\right) \cdot \left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) \frac{1}{3} dv du &= \int_0^4 \left(\int_{-4}^0 \frac{2}{9} u^2 - \frac{5}{3} uv - \frac{1}{3} v^2 \right) du = \\ \int_0^4 \left[\frac{8}{9} u^2 + \frac{40}{3} u - \frac{64}{9} \right] du &= \left[\frac{8}{27} u^3 + \frac{20}{3} u^2 - \frac{64}{9} u \right]_0^4 = \frac{64}{27} \cdot 41 \end{aligned}$$

28) Observe que podemos aplicar o Teorema de Stokes no Plano. Assim a integral de linha é igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\gamma} [(-2y + \sin(x + \cos(x)))dx + (2x + \ln(2 + \sin(y) + e^{-\cos(y)}))dy] &= \\ \frac{1}{2} \iint_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial(2x + \ln(2 + \sin(y) + e^{-\cos(y)}))}{\partial x} - \frac{\partial(-2y + \sin(x + \cos(x)))}{\partial y} \right) dx dy &= \\ = \frac{1}{2} \iint_{Int(\gamma)} 4 dx dy = 2 \cdot \text{Área}(Int(\gamma)) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

pois a curva γ é a fronteira do losango do exercício 27. Já calculamos a área e mostramos que o seu valor é $\frac{16}{3}$.

29) Basta calcularmos a área de uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Temos varias forma de calcular isto. Todos derivam do Teorema de Stokes e você pode encontrar estas fórmulas nas notas de aula. São elas

$$\int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} [-ydx + xdy] = \text{Área}(\gamma)$$

No caso da elipse

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \gamma'(t) &= (-a \sin t, b \cos t)\end{aligned}$$

Usando isto tem-se

$$\begin{aligned}\text{Área}(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} [-ydx + xdy] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-(b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)] dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab\end{aligned}$$

No caso de uma circunferência tem-se que

$$a = b = R$$

e logo a área de uma circunferência é

$$\pi R^2$$

30) Trata-se de uma aplicação direta do Teorema de Stokes no Plano

Tem-se

$$\int_Y [P(x, y) + x \operatorname{sen}(\ln(1 + x^2))] dx + [Q(x, y) + (1 + |y|)^y + \cos(1 + \arctg(1 + \ln(1 + y^4)))] dy =$$

$$\iint_{\operatorname{Int}(Y)} \left(\frac{\partial (Q(x, y) + (1 + |y|)^y + \cos(1 + \arctg(1 + \ln(1 + y^4))))}{\partial x} - \frac{\partial (P(x, y) + x \operatorname{sen}(\ln(1 + x^2)))}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\iint_{\operatorname{Int}(Y)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\operatorname{Int}(Y)} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)}_{0 \text{ pelo Teorema de Schwartz}} dx dy = 0$$

FIM DAS SUGESTÕES DA LISTA VI

Chegamos ao fim das soluções dos exercícios desta lista. Espero que elas sejam úteis para você. As soluções são completas e recheadas de detalhes e outras sugestões.

Os exercícios desta lista foram tirados de listas de cursos de Cálculo III dados no IAG, IO, IF e IME ao longo de vários anos. As soluções sempre eram apresentadas para os alunos em aula. Neste semestre também estamos resolvendo os exercícios da lista em aula mas agora estamos disponibilizando as soluções para você de forma digital faltando pouco menos de um mês da Prova P III. Esperamos que isto te ajude nos teus estudos. O nosso compromisso com você e a USP é que continua nos movendo.

Bons estudos

Prof. Juriaans, S.O.